EXERCICE 4 *(6 points)*

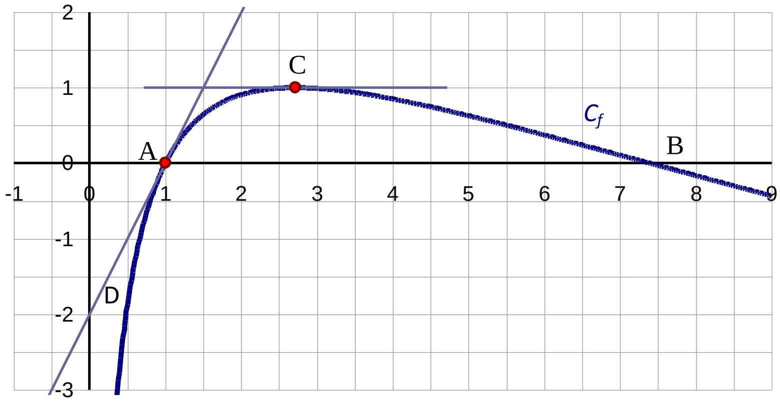
On admettra que les fonctions considérées dans cet exercice sont dérivables sur l'intervalle]0 ; +∞[.

Soit la fonction *f* définie sur l'intervalle]0 ; +∞[par $f(x) = (2 - \ln x)\ln x$.

La figure ci-dessous donne la courbe représentative C_f de la fonction *f* dans un repère orthonormal $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j})$.

La courbe C_f coupe l'axe des abscisses en A(1 ; 0) et en B.

La tangente en *C* à la courbe C_f est parallèle à l'axe des abscisses et la tangente en *A* à la courbe C_f coupe l'axe des ordonnées en *D*.



1. Déterminer l'abscisse du point *B* (la valeur exacte est demandée).
2. Calculer la limite de *f* en 0 et la limite de *f* en +∞.
3. On note *f '* la fonction dérivée de *f* sur]0 ; +∞[.
   a) Démontrer que pour tout réel *x* de l'intervalle]0 ; +∞[, $f'(x) = \dfrac{2(1 - \ln x)}{x}$.
   b) Déterminer les coordonnées du point *C* et l'ordonnée du point *D* (les valeurs exactes sont demandées).
4. a) Soit la fonction *g* définie sur l'intervalle]0 ; +∞[par $g(x) = x[f(x) + 2\ln(x) - 4]$.
   Démontrer que *g* est une primitive de *f* sur l'intervalle]0 ; +∞[.
   b) Calculer $\int_1^{e^2} f(x)\mathrm{d}x$ et donner une interprétation géométrique de cette intégrale.