EXERCICE 4 *(5 points)*

PARTIE A

On considère les fonctions *f* et *g* définies sur l'intervalle [1 ; 50] par :

$$f(x) = x^2 + 72\ln(10x+1) \text{ et } g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

1. Démontrer que la fonction *f* est croissante sur l'intervalle [1 ; 50].
2. La fonction *h* est définie sur l'intervalle [1 ; 50] par : $h(x) = x^2 + \frac{720x}{10x+1} - 72\ln(10x+1)$.

On admet que la dérivée de la fonction *h* est la fonction *h*′ définie par :

pour tout *x* élément de l'intervalle [1 ; 50], $h'(x) = \frac{2x(10x-59)(10x+61)}{(10x+1)^2}$.

a) Résoudre l'équation $h'(x) = 0$ sur l'intervalle [1 ; 50].
Étudier le signe de h′(x) sur l'intervalle [1 ; 50].

b) Dresser le tableau des variations de la fonction *h*.

c) On admet que, dans l'intervalle [1 ; 50], l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α. À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-2} près de α.

d) Expliquer pourquoi
– pour tout *x* élément de l'intervalle [1 ; α], $h(x) \leq 60$,

– pour tout *x* élément de l'intervalle [α ; 50], $h(x) \geq 0$.

3. a) Démontrer que pour tout *x* élément de l'intervalle [1 ; 50], $g'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$.

b) Démontrer que la fonction *g* admet un minimum pour $x = \alpha$.

c) En utilisant le fait que $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, exprimer g ′(*x*) en fonction de *f* ′(*x*) puis déduire de la question précédente que $g(\alpha) = f'(\alpha)$.

PARTIE B : application

Une entreprise a conduit une étude statistique sur les coûts de production de l'un de ses produits. Pour une production comprise entre 1 tonne et 50 tonnes et des coûts exprimés en milliers d'euros, cette étude conduit à adopter le modèle mathématique suivant :

– le coût total de production C_T est donné par $C_T = f(x)$, où *x* est la quantité produite exprimée en tonnes,
– pour une production de *x* tonnes, le coût moyen C_M de production d'une tonne est donné par $C_M = g(x)$ et le coût marginal *C* de production est donné par $C = f'(x)$.

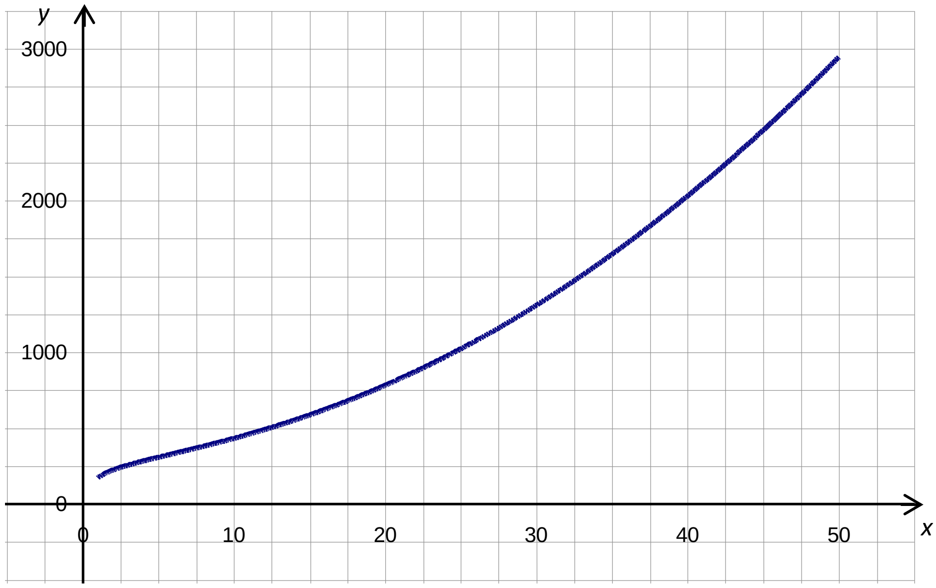
(*Des graphiques obtenus à l'aide d'un logiciel sont fournis en annexe 2 page 7. Ils peuvent être complétés et rendus avec la copie*).

1. Expliquer pourquoi, quelle que soit la quantité produite, l'entreprise ne peut espérer faire un bénéfice si elle vend sa production moins de 38 000 € la tonne.

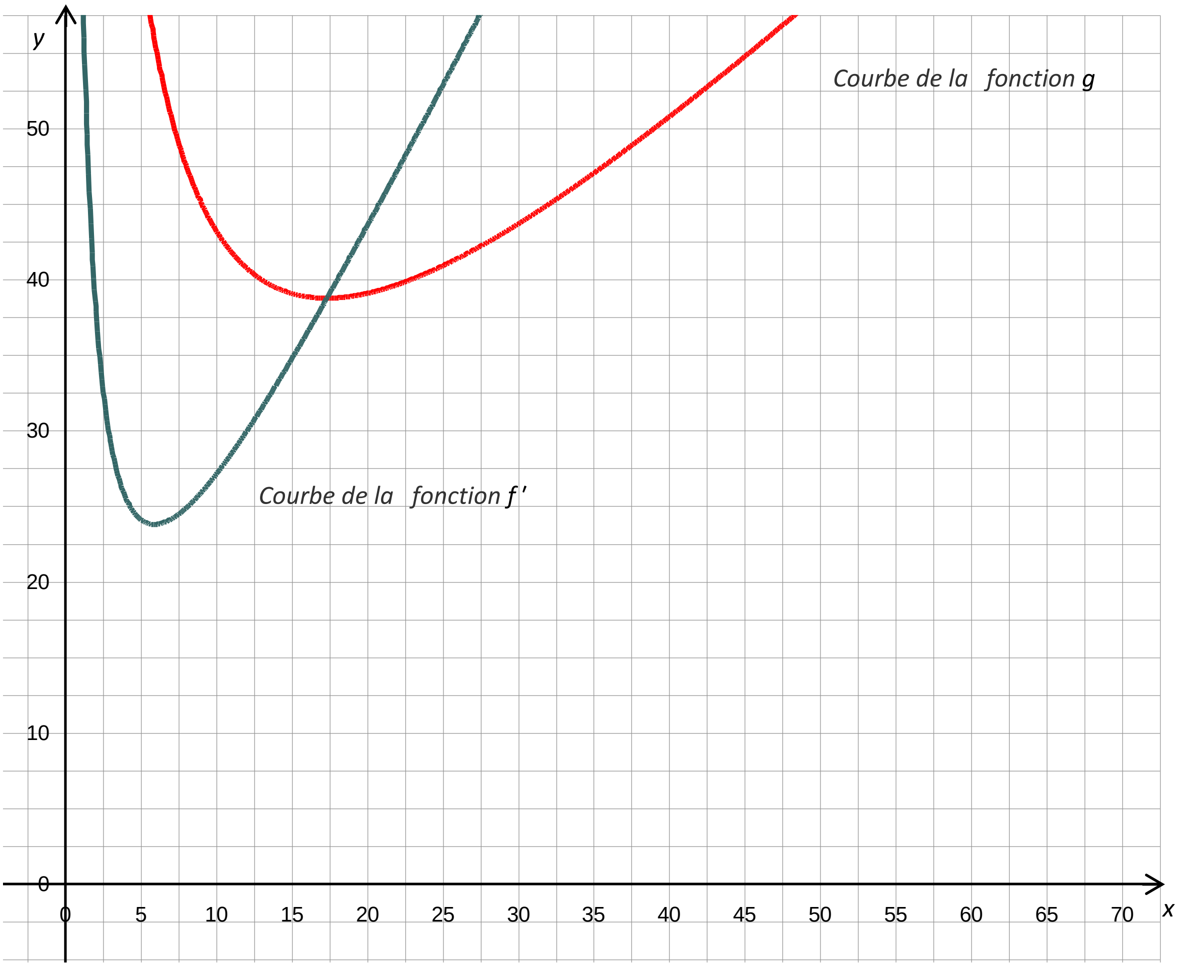
2. Quelle que soit sa production, l'entreprise pense pouvoir la vendre en totalité au prix de 45 000 euros la tonne. Donner une estimation des productions qui pourront permettre de réaliser un bénéfice.

ANNEXE 2 : A UTILISER POUR L'EXERCICE 4 PARTIE B ET A RENDRE AVEC LA COPIE

Représentation graphique de la fonction f :



Représentations graphiques des fonctions g et f ' :


y
50
40
30
20
10
0
Courbe de la fonction g
Courbe de la fonction f ′
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
65
70
x