

**EXERCICE 4** (6 points)

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = 5 \frac{\ln x}{x} + 3$ .

On note  $C_f$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

1. a) Déterminer la limite de  $f$  en  $0$  ; en donner une interprétation graphique.  
b) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$  ; en donner une interprétation graphique.
2. a) Calculer  $f'(x)$  où  $f'$  est la fonction dérivée de  $f$ , puis étudier son signe.  
b) En déduire le tableau de variation de la fonction  $f$ . On y indiquera les limites aux bornes de l'intervalle de définition de  $f$  ainsi que la valeur exacte de  $f(e)$ .
3. a) Déterminer une primitive de  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$ .  
On pourra remarquer que  $f(x) = 5u'(x) \times u(x) + 3$  avec  $u(x)$  à préciser.  
  
b) En déduire la valeur exacte de  $I = \int_2^4 f(t) dt$  sous la forme  $a(\ln 2)^2 + b$  avec  $a$  et  $b$  deux réels à déterminer.
4. a) Préciser le signe de  $f$  sur l'intervalle  $[2 ; 4]$ .  
b) Donner une interprétation graphique de  $I$ .
5. On admet que le bénéfice, en milliers d'euros, que réalise une entreprise lorsqu'elle fabrique  $x$  milliers de pièces est égal à  $f(x)$ .  
En utilisant les résultats précédents, déterminer la valeur moyenne du bénéfice lorsque la production varie entre 2 000 et 4 000 pièces. On donnera une valeur approchée de ce bénéfice à 100 euros près.