

EXERCICE 3 (6 points)

On désigne par f la fonction définie sur $]0 ; 5]$ par $f(x) = 1 - x + 2 \ln x$.

La courbe C donnée ci-dessous est la représentation graphique de f dans un repère orthogonal (unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées).

1. Calculer la limite de f en 0.
2. Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f . Dresser le tableau des variations de f .
3. a. Calculer $f(1)$.
 b. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[3 ; 4]$ une solution unique α puis donner une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de α .
 c. En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .
4. On appelle g la fonction définie sur $]0 ; 5]$ par $g(x) = x \left(-\frac{1}{2}x + 2 \ln x - 1 \right)$.
 a. Montrer que g est une primitive de f sur $]0 ; 5]$.
 b. Sur le graphique ci-dessous, on considère le domaine limité par l'axe des abscisses et la partie de la courbe C située au-dessus de cet axe. Montrer que l'aire de ce domaine est égale en unités d'aire, à $g(\alpha) - g(1)$.
 c. Calculer une valeur approchée de l'aire A exprimée en cm^2 . On utilisera la valeur approchée de α trouvée au 3. b.

