EXERCICE 3 *(4 points)*

L'objectif de cet exercice est de démontrer la propriété algébrique fondamentale de la fonction logarithme népérien notée ln.

Propriété fondamentale :

Pour tous réels strictement positifs a et b, ln (*ab*) = ln *a* + ln *b*

Rappels

On rappelle les résultats de cours suivants, auxquels le candidat fera clairement référence pour justifier chacune de ses affirmations au cours des étapes de la démonstration (on pourra en rappeler le numéro).

Théorème 1 : Sur un intervalle I, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Théorème 2 : Soit *u* une fonction définie, dérivable et strictement positive sur un intervalle I, la fonction composée définie par $x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I, de fonction dérivée $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Théorème 3 : La somme *f* de deux fonctions dérivables *u* et *v* sur un même intervalle I est dérivable sur I et $f' = u' + v'$.

Définition : ln I = 0 .

Enoncé de l'exercice

Soit *a* un réel constant strictement positif.

On considère les fonctions *f* et *g*, de variable *x*, définies sur] 0 ; +∞ [par : $f(x) = \ln(ax)$ et $g(x) = \ln a + \ln x$

Partie 1

Dans le cas où *a* = 2, donner les fonctions dérivées de $f : x \mapsto \ln(2x)$ et $g : x \mapsto \ln 2 + \ln x$.

Partie 2 : Démonstration de la propriété

1. Calculer et comparer les dérivées de *f* et de *g* dans le cas général où *a* est un réel constant strictement positif.
2. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe un réel *k* tel que, pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f(x) = g(x) + k$?
3. En posant *x* = 1 , déterminer la valeur de *k*.
4. Justifier la propriété fondamentale de la fonction ln énoncée en début d'exercice.