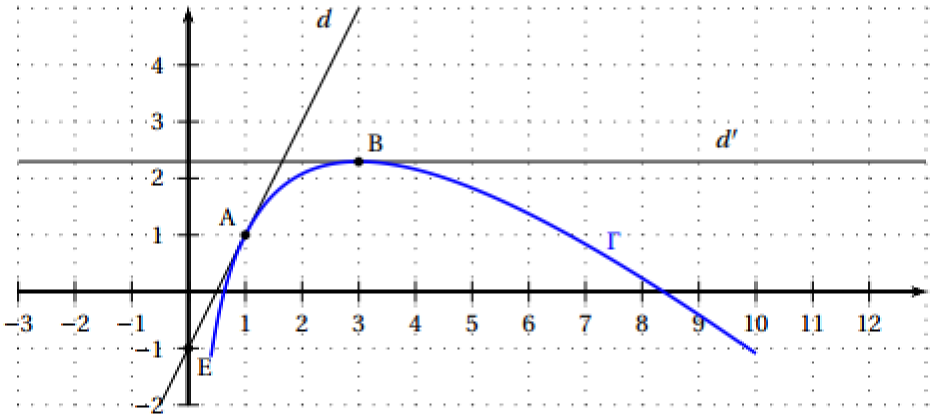
La fonction f est définie sur l'intervalle $[0,5\,;\,10]$ par :

$$f(x) = ax + 2 + b\ln(x)$$

où a et b sont deux nombres réels.
On note f' la fonction dérivée de f.
Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :

- la courbe représentative Γ de la fonction f ;
- la droite d tangente à la courbe Γ au point A de coordonnées $(1\,;\,1)$;
- la droite d' tangente à la courbe Γ au point B d'abscisse 3.



On sait de plus que :

- la tangente au point A passe par le point E de coordonnées $(0\,;\,-1)$.
- la tangente au point B est parallèle à l'axe des abscisses.

Partie A

1. Donner par lecture graphique la valeur de $f'(1)$, puis celle de $f'(3)$.
2. Calculer $f'(x)$.
3. En déduire les valeurs des nombres a et b.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle [0,5 ; 10] par :

$$f(x) = -x + 2 + 3\ln(x).$$

1. Montrer que pour x dans [0,5 ; 10],

$$f'(x) = \frac{-x+3}{x}.$$

2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe Γ au point A d'abscisse 1.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [0,5 ; 10], puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.
4. Montrer que sur l'intervalle [0,5 ; 3] l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution. Donner une valeur approchée de cette solution arrondie au centième.
5. Un logiciel de calcul formel nous donne le résultat suivant :

1	*intégrer* $[3\ln(x) - x + 2]$
	$3x\ln(x) - x - \frac{x^2}{2}$

Calculer, en unités d'aire, l'aire S du domaine délimité par la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 8$.
On donnera la valeur exacte de S puis sa valeur arrondie au centième.

Partie C

Tom observe que sur le dessin précédent, la courbe représentative de f est située en dessous des deux tangentes aux points A et 8. Il affirme :
« La courbe représentative de f sur l'intervalle [0,5 ; 10] est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes. »
Démontrer que l'affirmation de Tom est exacte.