

**EXERCICE 3** (6 points)**PARTIE A**

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; 20]$  par  $f(x) = (3e^2 - x) \ln x + 10$ .

1. a. Déterminer la limite de  $f$  en 0.  
b. Calculer la valeur exacte de  $f(e^2)$ , puis une valeur approchée à 0,01 près.
2. Montrer que pour tout  $x$  de l'intervalle  $]0; 20]$ ,  $f'(x) = -\ln x + \frac{3e^2}{x} - 1$  où  $f'$  désigne la dérivée de la fonction  $f$ .
3. On admet que la fonction dérivée  $f'$  est strictement décroissante sur  $]0; 20]$  et que son tableau de variations est le suivant :

$x$	0	$e^2$	20
$f'(x)$		$+\infty$	$f'(20)$

- a. À l'aide du tableau de variations, donner le signe de  $f'(x)$  pour  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0; 20]$ .
- b. Déterminer le sens de variation de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0; 20]$  et dresser son tableau de variations sur cet intervalle.
4. a. Montrer que sur l'intervalle  $[0,6; 0,7]$ , l'équation  $f(x) = 0$  possède une unique solution notée  $\alpha$ . À la calculatrice, donner une valeur approchée de  $\alpha$  à 0,001 près par excès.  
b. Démontrer que  $f(x)$  est négatif pour tout  $x \in ]0; \alpha[$  et que  $f(x)$  est positif pour tout  $x \in ]\alpha; 20]$ .

**PARTIE B**

Une entreprise produit et vend chaque semaine  $x$  milliers de DVD,  $x$  appartenant à  $]0; 20]$ .

Le bénéfice réalisé est égal à  $f(x)$  milliers d'euros où  $f$  est la fonction étudiée dans la partie A.

En utilisant les résultats de la partie A :

1. déterminer le nombre minimal de DVD à fabriquer pour que le bénéfice soit positif ;
2. déterminer le nombre de DVD à produire pour que le bénéfice soit maximal ainsi que la valeur, à 10 euros près, de ce bénéfice maximal.