

EXERCICE 3 (5 points)

On considère les fonctions f , g et h définies sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = -x + 1$ et $h(x) = f(x) - g(x)$.

On note C_f la courbe représentative de la fonction f et Δ la droite représentant la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

PARTIE A Position relative de C_f et de l'une de ses tangentes.

- Vérifier, par le calcul, que la tangente à C_f au point d'abscisse 0 est la droite Δ .
- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 1 - e^{-x}$.
 - Étudier le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x .
 - En déduire le sens de variation de la fonction h sur \mathbb{R} .
- En utilisant les questions 1. et 2., étudier la position relative de la courbe C_f et de sa tangente au point d'abscisse 0.

PARTIE B Calcul d'aire

- Montrer que $\int_0^1 h(x) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}$.
- Dans cette question, toute trace de recherche même non aboutie sera prise en compte dans l'évaluation.*

Soit a un nombre réel vérifiant $a > 1$. On appelle D le domaine colorié sur le graphique en annexe.

On note A l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine D .

- Déterminer en fonction de a la valeur de A .
- Déterminer la limite de A lorsque a tend vers $+\infty$.

ANNEXE

