TES **INTEGRALES** feuille 4

EXERCICE 4 (*6 points*)

On considère les fonctions *f* et *g* définies sur l'intervalle [0 ; +∞[par :

$$f(x) = (7-x)\mathrm{e}^{x-4} \text{ et } g(x) = 2\ln\left(\frac{x+5}{x+1}\right).$$

PARTIE A : Étude des fonctions *f* et *g*.

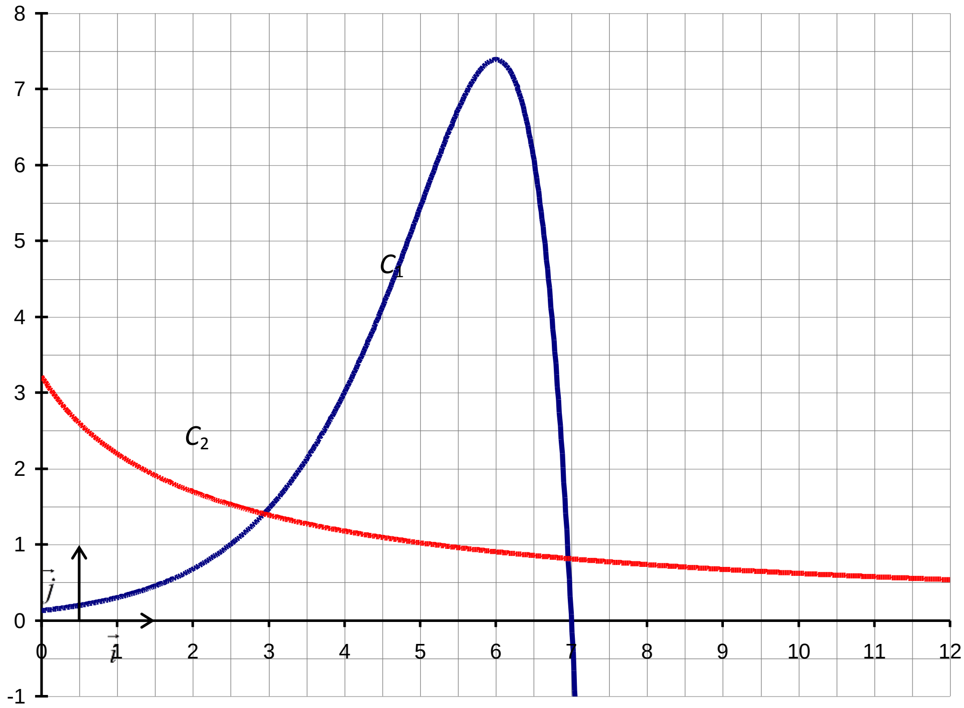
1. Déterminer la limite de la fonction *f* en +∞.
   b. Montrer que, pour tout nombre réel *x* de l'intervalle [0 ; +∞[on a $f'(x) = (6-x)\mathrm{e}^{x-4}$.
   c. Étudier les variations de la fonction *f* sur l'intervalle [0 ; +∞[et établir son tableau de variations.
2. Soit *h* la fonction définie sur $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{x+5}{x+1}$.

   Le tableau de variations de la fonction *h* est donné ci dessous :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	‖	$+$	
$h(x)$	1 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1

   Déterminer, en le justifiant, le sens de variation de la fonction *g* sur l'intervalle [0 ; +∞[

   b. Déterminer la limite de la fonction *g* en +∞. Quelle en est la conséquence graphique ?
3. Les courbes représentatives des fonctions *f* et *g* sont données dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ ci-dessous.



a. Laquelle de ces deux fonctions est représentée par la courbe C_1 ?

b. Déterminer graphiquement une valeur approchée arrondie à l'unité des solutions de l'équation $f\left(x\right)=g(x)$ sur l'intervalle [0 ; +∞[.

c. Dans cette question, toute tentative d'explication de la démarche ou de la méthode utilisée sera valorisée.

Le professeur a demandé à Perrine et Elliot de calculer $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$. Voici des extraits de leurs productions :

Production de Perrine :

Une primitive de *f* est *F* telle que $F(x)=\left(8-x\right)\mathrm{e}^{x-4}$, donc $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=5\mathrm{e}^{-1}-8\mathrm{e}^{-4}\approx 1,69$.

Production d'Elliot :

Une primitive de *f* est *F* telle que $F(x)=\left(7x-\dfrac{1}{2}x^2\right)\mathrm{e}^{x-4}$, donc $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=16,5\mathrm{e}^{-1}\approx 6,07$.

Lors de la correction, le professeur indique que l'un des deux s'est trompé. Est-ce Perrine ou Elliot ? Justifier le choix.

PARTIE B : Application économique

Sur l'intervalle [0 ; 5], la fonction *f* modélise la fonction d'offre des producteurs d'un certain produit et la fonction *g* modélise la fonction de demande des consommateurs pour ce même produit. La quantité *x* est exprimée en millier de tonnes et le prix *f* (*x*) ou *g* (*x*) est en euro par kg.

On rappelle que le prix d'équilibre est le prix qui se forme sur le marché lorsque l'offre est égale à la demande. La quantité d'équilibre est la quantité associée au prix d'équilibre.

Par lecture graphique, donner une valeur approchée de la quantité d'équilibre x_0, ainsi qu'une valeur approchée du prix d'équilibre y_0.