

Une entreprise fabrique et commercialise un article dont la production est comprise entre 1 000 et 7 000 articles par semaine.

On modélise le coût de fabrication, exprimé en milliers d'euros, par la fonction f définie dans la partie A où x désigne le nombre de milliers d'articles fabriqués.

On note c la fonction définie sur $[1 ; 7]$ représentant le coût moyen par article fabriqué, exprimé en euros. On a, par conséquent, pour tout x de $[1 ; 7]$:

$$c(x) = \frac{f(x)}{x} = 1,5x^2 - 9x + 24 + \frac{48}{x}.$$

On admet que la fonction c est dérivable sur $[1 ; 7]$. On note c' sa fonction dérivée.

1. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[1 ; 7]$, on a :

$$c'(x) = \frac{3(x-4)(x^2+x+4)}{x^2}.$$

2. **a.** Étudier les variations de la fonction c sur l'intervalle $[1 ; 7]$.
b. Déterminer, en milliers, le nombre d'articles à fabriquer pour que le coût moyen par article soit minimal.
3. On considère la fonction Γ définie sur l'intervalle $[1 ; 7]$ par :

$$\Gamma(x) = 0,5x^3 - 4,5x^2 + 24x + 1 + 48 \ln x.$$

- a.** Montrer que Γ est une primitive de c sur l'intervalle $[1 ; 7]$.
b. Calculer la valeur moyenne μ de c sur l'intervalle $[1 ; 7]$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2} .