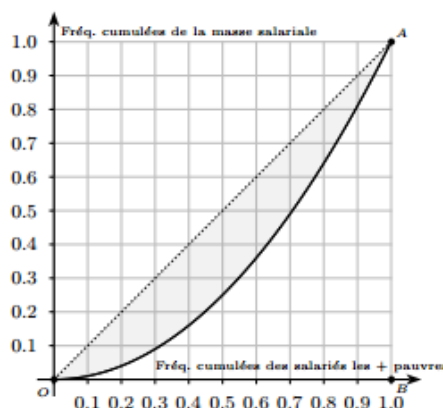


Afin d'évaluer les inégalités, par exemple salariales dans une entreprise, Lorentz a eu l'idée de représenter la courbe des fréquences cumulées de la masse salariale en fonction de la fréquence cumulée des salariés les plus pauvres.

EXERCICE 1. Courbe de Lorentz

La courbe de Lorentz en traits pleins ci-contre illustre la situation d'une entreprise.

- ① Quel pourcentage de la masse salariale revient aux 50% des salariés les plus pauvres ?
- ② Quel pourcentage de la masse salariale revient aux 10% des salariés les plus riches ?
- ③ Quel pourcentage des salariés les plus pauvres paient-on avec la moitié de la masse salariale ?
- ④ Que peut-on dire des salaires de l'entreprise dont la courbe de Lorentz est en pointillés ?



EXERCICE 2. Propriétés des courbes de Lorentz

On note f la fonction représentée par la courbe de Lorentz $\mathcal{C}$.

- ① Expliquer pourquoi f vérifie
 - (a) $f(0) = 0$ (b) $f(1) = 1$. (c) $f(x) \leq x$ (d) f est croissante (e) f convexe.
- ② Vérifier que les fonctions suivantes conviennent : pour $x \in [0; 1]$
 - (a) $f_1(x) = x^2$ (b) $f_2(x) = x^3$ (c) $f_3(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^2 - 1}$
- ③ Représenter ces trois fonctions ainsi que $y = x$ à la calculatrice.
 - (a) Laquelle correspond à la situation la plus inégalitaire ?
 - (b) Conjecturer laquelle des trois est la moins inégalitaire.

EXERCICE 3. Coefficient de Gini

Le *coefficient de Gini*, noté γ est une mesure du degré d'inégalité de la distribution des revenus dans une population.

$$\text{On a } \gamma = \frac{\text{aire entre } [OA] \text{ et } \mathcal{C}}{\text{aire du triangle } OBA}$$

- ① Expliquer pourquoi $0 \leq \gamma \leq 1$ et dire à quoi correspondent les situations extrêmes.
- ② Montrer que $\gamma = 1 - 2 \int_0^1 f(x) dx$.
- ③ Calculer γ pour les fonctions f_1, f_2 et f_3 .
- ④ Valider la conjecture émise dans l'exercice précédent.