

Une entreprise fabrique et vend à des particuliers des panneaux solaires photovoltaïques produisant de l'électricité. Elle en produit chaque mois entre 50 et 2 500.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,5; 25]$ par

$$f(x) = 18 \ln x - x^2 + 16x - 15.$$

Si x représente le nombre de centaines de panneaux solaires fabriqués et vendus, alors on admet que $f(x)$ représente le bénéfice mensuel de l'entreprise, en milliers d'euros.

On suppose que f est dérivable sur $[0,5; 25]$, et on note f' sa fonction dérivée.

PARTIE A

1. Calculer $f'(x)$. Vérifier que, pour tout nombre x appartenant à l'intervalle $[0,5; 25]$, on a $f'(x) = \frac{-2x^2 + 16x + 18}{x}$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0,5; 25]$. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0,5; 25]$.
3.
 - a. Calculer $f(1)$.
 - b. Montrer que sur l'intervalle $[18; 19]$ l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α . Déterminer une valeur approchée par défaut de α à 10^{-2} près.
 - c. En déduire le signe de $f(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[0,5; 25]$.
4. Quels sont le nombre minimal et le nombre maximal de panneaux que l'entreprise doit produire et vendre pour être bénéficiaire?
5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
L'entreprise peut-elle réaliser un bénéfice mensuel de 100 000 €? Justifier la réponse.

PARTIE B

1. On admet que la fonction G définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $G(x) = x \ln x - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien sur l'intervalle $]0; +\infty[$. En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0,5; 25]$.
2. *Rappel : soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a; b]$, où $a < b$.
La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a; b]$ est le nombre réel m défini par $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.*
Déterminer la valeur moyenne du bénéfice mensuel de l'entreprise, arrondie à la centaine d'euros, lorsque celle-ci produit et vend entre 100 et 1 800 panneaux solaires.