On considère les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}, \quad g(x) = -x+1 \quad \text{et} \quad h(x) = f(x) - g(x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et Δ la droite représentant la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

Partie A Position relative de $\mathscr{C}_f$ et de l'une de ses tangentes.

1. Vérifier, par le calcul, que la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est la droite Δ.
2. **a.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$.
   b. Étudier le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x.
   c. En déduire le sens de variation de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
3. En utilisant les questions 1. et 2., étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de sa tangente au point d'abscisse 0.

Partie B Calcul d'aire

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{\mathrm{e}}$.
2. *Dans cette question, toute trace de recherche même non aboutie sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Soit a un nombre réel vérifiant $a > 1$. On appelle D le domaine colorié sur le graphique en **annexe**.
   On note $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine D.
   a. Déterminer en fonction de a la valeur de $\mathscr{A}$.
   b. Déterminer la limite de $\mathscr{A}$ lorsque a tend vers $+\infty$.