

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes

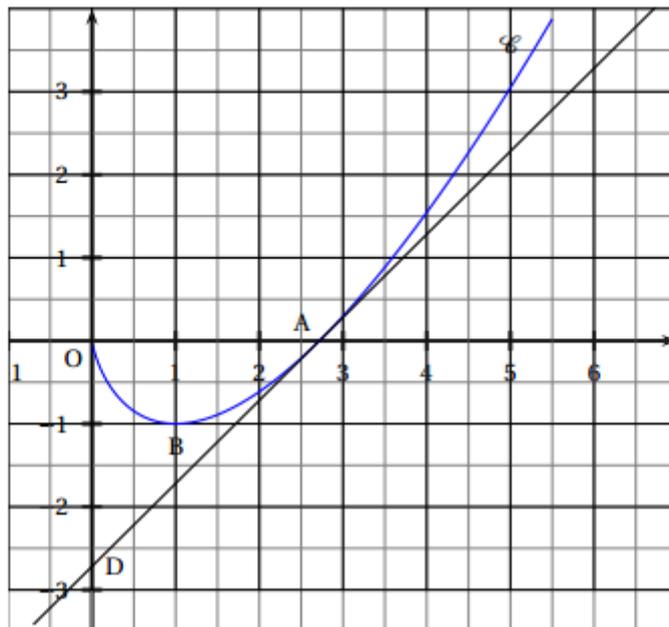
Partie A. Lectures graphiques

La courbe \mathcal{C} ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et dérivable sur $]0; +\infty[$.

On note f' la fonction dérivée de f .

La courbe \mathcal{C} passe par les points $A(e; 0)$ et $B(1; -1)$.

La courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1 et la tangente au point d'abscisse e passe par le point $D(0; -e)$.



1. Déterminer une équation de la droite (AD).

Aucune justification n'est exigée pour les réponses à la question 2.

2. Par lectures graphiques :

- Déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.
- Dresser le tableau de signes de f sur $]0; 5]$.
- Dresser le tableau de signes de f' sur $]0; 5]$.
- Soit F une primitive de f sur $]0; +\infty[$. Déterminer les variations de F sur $]0; 5]$.
- Encadrer par deux entiers consécutifs l'aire (en unités d'aire) du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe \mathcal{C} et les droites d'équation $x = 4$ et $x = 5$.

Partie B. Étude de la fonction

La courbe \mathcal{C} de la partie A est la représentation graphique de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x(\ln x - 1).$$

1.
 - a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
 - b. Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = x \ln x$. On rappelle que $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$.
Déterminer la limite de f en 0.
2.
 - a. Montrer que, pour tout x de $]0; +\infty[$, on a : $f'(x) = \ln x$.
 - b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$ et en déduire le tableau de variations de f sur $]0; +\infty[$.
3.
 - a. Démontrer que la fonction H définie sur $]0; +\infty[$ par $H(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2$ est une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction h définie à la question 1. b.
 - b. En déduire une primitive F de f et calculer $\int_1^e f(x) dx$.
 - c. En déduire l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$. On arrondira le résultat au dixième.