Partie A

On considère la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 10 + (x-3)\mathrm{e}^x$$

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b. Démontrer que $f'(x) = (x-2)\mathrm{e}^x$ et étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   c. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   d. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
2. a. Démontrer que la fonction $G : x \longmapsto (x-4)\mathrm{e}^x$ est une primitive sur $[0\ ;\ +\infty[$ de la fonction $g : x \longmapsto (x-3)\mathrm{e}^x$.
   b. En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   c. Étudier le sens de variation de F sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie B

Une entreprise fabrique x tonnes d'un certain produit, avec $x \in [0\ ;\ 4]$. Le coût marginal de fabrication pour une production de x tonnes est donné par $f(x)$ exprimé en **milliers d'euros**, où f est la fonction définie dans la partie A.

1. Les coûts fixes de l'entreprise s'élèvent à 20 000 euros. On assimile le coût total C à une primitive du coût marginal.
   En utilisant les résultats de la question A 2., déterminer le coût total de fabrication $C(x)$, exprimé en milliers d'euros.
2. L'entreprise désire adapter sa production pour atteindre un coût marginal de 11 292 euros.
   a. En utilisant la partie A démontrer qu'il est possible d'atteindre un coût marginal de 11 292 euros. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.*
   b. Déterminer la production correspondante, à 10 kg près.
   c. Quel est alors le coût moyen de fabrication ?
   On rappelle que le quotient $\dfrac{C(x)}{x}$ est appelé coût moyen de fabrication pour une production de x tonnes de produit.