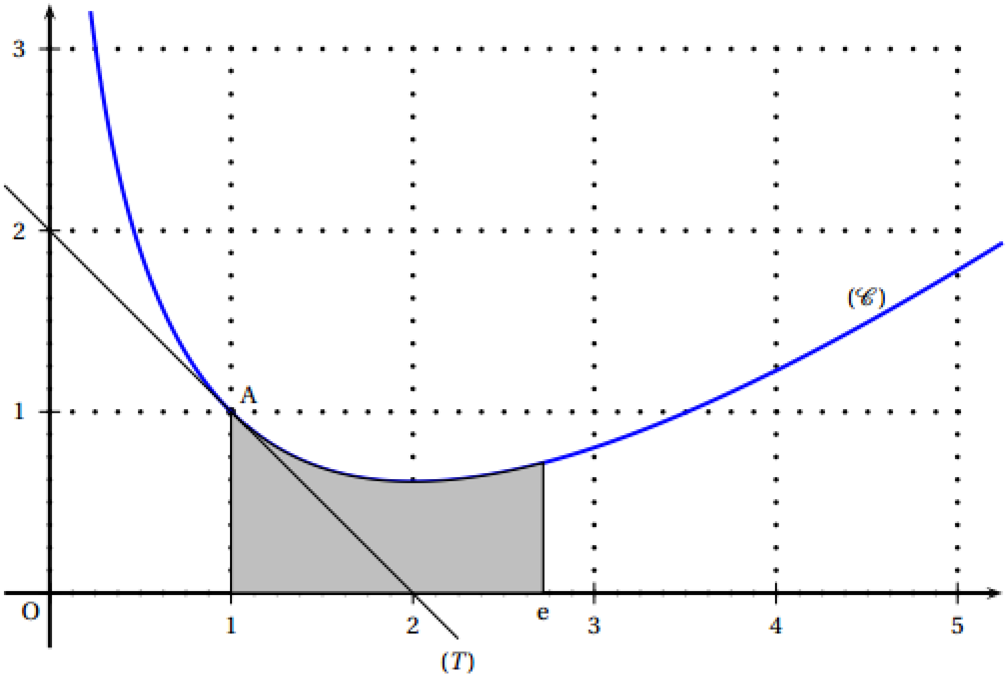
Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ dont on donne la représentation graphique $(\mathscr{C})$ dans le repère ci-dessous.



On admet que
- le point A de coordonnées $(1\,;\,1)$ appartient à la courbe $(\mathscr{C})$;
- la tangente (T) en A à la courbe $(\mathscr{C})$ passe par le point de coordonnées $(2\,;\,0)$;
- la courbe $(\mathscr{C})$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 2 ;
- l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe de la fonction f.

Partie A

1. Donner, par lecture graphique ou en utilisant les données de l'énoncé, les valeurs de $f(1)$, $f'(1)$ et $f'(2)$, où f' est la fonction dérivée de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. On admet que l'expression de $f(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$ est :

$$f(x) = ax + b + c\ln x$$

où a, b et c sont des nombres réels.

a. Calculer $f'(x)$ en fonction de x et de a, b et c.

b. Démontrer que les réels a, b et c vérifient le système $\begin{cases} a+b & = & 1 \\ a+c & = & -1 \\ a+\frac{c}{2} & = & 0 \end{cases}$

c. Déduire de la question précédente les valeurs de a, b et c, puis l'expression de $f(x)$.

Partie B

Dans cette partie, on admet que la fonction f représentée ci-dessus est définie pour tout réel x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x - 2\ln x.$$

1. Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe représentative de f.
2. **a.** Calculer la dérivée g' de la fonction g définie pour tout réel $x \in]0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = x\ln x - x$.

   b. En déduire une primitive F de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.

   c. Déterminer la valeur exacte, en unités d'aires, de l'aire du domaine grisé sur le graphique ci-dessus, délimité par la courbe ($\mathscr{C}$)), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.