

Lors d'une émission télévisée, les téléspectateurs sont appelés à envoyer des messages téléphoniques par SMS, pendant une durée de 5 minutes.

Pendant ces 5 minutes, les appels arrivent de façon continue, avec un débit variable en fonction du temps. Si x est le temps exprimé en minutes, le débit, exprimé en milliers d'appels par minute, est donné par la fonction f telle que :

- $f(x) = -4x^2 + 8x$ pour $x \in [0 ; 1]$.
- $f(x) = \ln x - x + 5$ pour $x \in [1 ; 5]$.

La courbe ($\mathcal{C}$), représentative de la fonction f dans un repère orthonormal du plan, est donnée ci-après à titre indicatif.

On veut calculer le nombre total d'appels reçus pendant ces 5 minutes, et on admet que ce nombre d'appels est donné par $\int_0^5 f(x) dx$.

1. Démontrer que f est croissante sur $[0 ; 1]$, et décroissante sur $[1 ; 5]$.
2.
 - a. Donner une primitive de la fonction f sur $[0 ; 1]$.
 - b. Calculer l'aire exprimée en unités d'aire du domaine plan limité par la courbe ($\mathcal{C}$), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.
3.
 - a. Soient g et G les fonctions définies sur $[1 ; 5]$ par $g(x) = \ln x$ et $G(x) = x \ln x - x$.
Montrer que G est une primitive de g sur $[1 ; 5]$.
 - b. Calculer l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine plan limité par la courbe ($\mathcal{C}$), l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 5$.
4. Donner le nombre total d'appels reçus pendant ces 5 minutes.

