TES **INTEGRALES** feuille 10

EXERCICE 4 *(7 points)*

Une entreprise produit et vend un modèle de pièces pour hélicoptères. Pour des raisons techniques et de stockage, sa production mensuelle est comprise entre 100 et 600 pièces. Elle vend tout ce qui est produit.

On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle [1 ; 6] par $f(x) = -x^2 + 10x - 9 + 8\ln(x)$.

f (*x*) représente le bénéfice mensuel, exprimé en dizaines de milliers d'euros, obtenu pour la vente de *x* centaines de pièces.

La fonction *f* est dérivable sur l'intervalle [1 ; 6]. On note $f\,'$ sa fonction dérivée.

Les questions 1 *et* 2 *sont indépendantes.*

1. a) Montrer que pour tout nombre réel *x* appartenant à l'intervalle $[1;6]$, $f\,'(x) = \dfrac{-2(x-1)(x-4)}{x}$.
   b. Étudier le signe de $f\,'(x)$ sur l'intervalle [1 ; 6].
   c. En déduire le tableau de variations de la fonction *f* sur l'intervalle [1 ; 6].
   d. Quelle est la quantité de pièces à produire pour obtenir un bénéfice mensuel maximal ? Calculer ce bénéfice arrondi à l'euro près.
2. a) Prouver que la fonction *g* définie sur l'intervalle]0 ; +∞[par $g(x) = x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien sur l'intervalle]0 ; +∞[.
   b. En déduire une primitive *F* de la fonction *f* sur l'intervalle [1 ; 6].
   c. Calculer la valeur moyenne de la fonction *f* sur l'intervalle [1 ; 6] (donner la valeur décimale arrondie au dixième).

Rappel : Soit *f* une fonction et [*a* ; *b*] un intervalle sur lequel *f* est définie et dérivable.

La valeur moyenne *m* de *f* sur l'intervalle [*a* ; *b*], est le nombre *m* tel que :

$$m = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$