Les parties A et B sont indépendantes. Le candidat pourra utiliser les résultats préliminaires dans la partie A, même s'il ne les a pas établis.

Préliminaires

On admet les éléments du tableau de signes ci-dessous.

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\frac{6}{x} - 6x^2$	||	$+$	0	$-$	

Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = 6\ln x - 2x^3 - 3.$$

On désigne par g' la fonction dérivée de g.

1. Calculer $g'(x)$.
2. En utilisant 1., déterminer le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. On ne demande pas les limites dans cette question.
3. En déduire que $g(x) < 0$ pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$.

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x + \frac{3\ln x}{2x^2}$$

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en 0.
2. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.
   a. Montrer que, pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = -\frac{g(x)}{2x^3}$.
   b. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B

1. On définit la fonction F sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2} \times \frac{1 + \ln x}{x}.$$

   Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

2. On a représenté ci-dessous, dans un repère orthogonal, la courbe représentative de f notée $\mathscr{C}_f$.

On a colorié le domaine limité par $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \text{e}$.

Donner la valeur exacte, exprimée en unités d'aire, de l'aire de ce domaine, puis une valeur approchée arrondie au centième.