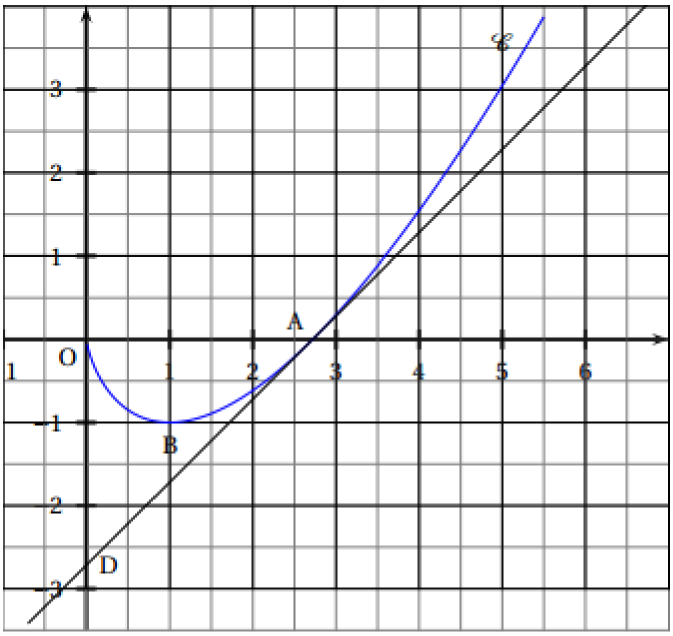
Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes

Partie A. Lectures graphiques

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
On note f' la fonction dérivée de f.
La courbe $\mathscr{C}$ passe par les points A(e ; 0) et B(1 ; −1).
La courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1 et la tangente au point d'abscisse e passe par le point D(0 ; −e).



1. Déterminer une équation de la droite (AD).

Aucune justification n'est exigée pour les réponses à la question 2.

2. Par lectures graphiques :
   a. Déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.
   b. Dresser le tableau de signes de f sur $]0\,;\,5]$.
   c. Dresser le tableau de signes de f' sur $]0\,;\,5]$.
   d. Soit F une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$. Déterminer les variations de F sur $]0\,;\,5]$.
   e. Encadrer par deux entiers consécutifs l'aire (en unités d'aire) du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = 4$ et $x = 5$.

Partie B. Étude de la fonction

La courbe $\mathscr{C}$ de la partie A est la représentation graphique de la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x(\ln x - 1).$$

2. **a.** Montrer que, pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, on a : $f'(x) = \ln x$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$ et en déduire le tableau de variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

3. **a.** Démontrer que la fonction H définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $H(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2$ est une primitive sur $]0\,;\,+\infty[$ de la fonction h définie à la question 1. b.

b. En déduire une primitive F de f et calculer $\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

c. En déduire l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$. On arrondira le résultat au dixième.