EXERCICE 2 *(5 points)* **CANDIDATS AYANT SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE**

Dans une région de France supposée démographiquement stable, on compte 190 milliers d'habitants qui se déplacent en voiture pour aller travailler : les uns se déplacent seuls dans leur voiture, les autres pratiquent le co-voiturage.

On admet que :

- si une année un habitant pratique le co-voiturage, l'année suivante il se déplace seul dans sa voiture avec une probabilité égale à 0,6 ;
- si une année un habitant se déplace seul dans sa voiture, l'année suivante il pratique le co-voiturage avec une probabilité égale à 0,35.

PREMIERE PARTIE

On note C l'état « pratiquer le co-voiturage » et V l'état « se déplacer seul dans sa voiture ».

1. Dessiner un graphe probabiliste de sommets C et V qui modélise la situation aléatoire décrite.
2. En considérant C et V dans cet ordre, en ligne, la matrice de transition associée à ce graphe est $M = \begin{pmatrix} 0,40 & 0,60 \\ 0,35 & 0,65 \end{pmatrix}$.

   Vérifier que l'état stable du système correspond à la matrice ligne $\begin{pmatrix} 70 & 120 \end{pmatrix}$.

   En donner une interprétation.

DEUXIEME PARTIE

En 2000, 60 milliers d'habitants pratiquaient le co-voiturage et 130 milliers d'habitants se déplaçaient seuls dans leur voiture.

On appelle X_n (*n* entier naturel) le nombre de milliers d'habitants qui pratiquent le co-voiturage durant l'année 2000 + *n*. On a donc $X_0 = 60$.

On admet que pour tout entier naturel *n*, $X_{n+1} = 0,05X_n + 66,5$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel *n* par $U_n = X_n - 70$.

1. Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
2. Montrer que pour tout entier naturel *n*, $X_n = 70 - 10 \times 0,05^n$.

   Est-il possible que, durant une année, le nombre d'habitants pratiquant le co-voiturage atteigne la moitié de la population de cette région ?