

EXERCICE 3 (5 points) **CANDIDATS AYANT SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE**

Une association sportive propose à ses adhérents de pratiquer au choix soit le karaté, soit le judo ; chaque adhérent pratique un et un seul de ces deux sports.

Chaque année les adhérents renouvellent tous leur adhésion. L'association n'accueille pas de nouveaux adhérents. Elle compte 800 adhérents.

Pour le renouvellement des adhésions, les données des années précédentes permettent d'envisager le modèle suivant :

- 70% des adhérents qui étaient inscrits au karaté se réinscrivent au karaté,
- 20% des adhérents qui étaient inscrits au judo s'inscrivent au karaté.

En 2003, 200 adhérents étaient inscrits dans la section karaté et 600 adhérents étaient inscrits dans la section judo.

On appelle $P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice traduisant la répartition des adhérents selon le sport pratiqué l'année 2003 + n :

- a_n représente la proportion des adhérents inscrits au karaté l'année 2003 + n
- b_n représente la proportion des adhérents inscrits au judo l'année 2003 + n
- $a_n + b_n = 1$.

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste.
2. Déterminer l'état initial $P_0 = (a_0 \quad b_0)$.
3. a. Déterminer la matrice de transition M associée au graphe. (Rappel M est la matrice telle que : $P_{n+1} = P_n \times M$.)
b. En admettant que, en 2005, 36,25% des adhérents sont inscrits au karaté et 63,75% des adhérents sont inscrits au judo, déterminer la répartition que le modèle envisagé permet de prévoir pour 2006. (Exprimer les résultats sous forme de pourcentages, puis donner les nombres d'adhérents correspondants.)
4. Soit $P = (x \quad y)$ la matrice correspondant à l'état stable, c'est à dire telle que $P \times M = P$. (Rappel : x et y sont des nombres réels tels que $x + y = 1$.)
 - a. Déterminer les nombres x et y .
 - b. En déduire la limite de a_n quand n tend vers l'infini.
Interpréter ce résultat.
5. Dans la même ville, un club de judo accepte de nouveaux adhérents : chaque année le nombre de ses adhérents augmente de 10%. Le club comptait 405 adhérents en 2003. En utilisant une calculatrice, trouver en quelle année l'effectif de ce club sera pour la première fois supérieur à l'effectif de la section judo de l'association étudiée dans les questions précédentes ?