**EXERCICE 2** *(5 points)*

Deux joueurs A et B, amateurs de tennis, décident de jouer une partie toutes les semaines.

- La probabilité que A gagne la partie de la première semaine est 0,7.
- Si A gagne la partie de la semaine $n$, il garde la même stratégie de jeu la semaine suivante, et la probabilité qu'il gagne alors la partie de la semaine ($n$ +1) est seulement de 0,4.
- Si A perd la partie de la semaine $n$, il change de stratégie de jeu pour la semaine suivante, et alors, la probabilité qu'il gagne la partie de la semaine ($n$ +1) est de 0,9.

Pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 1, on désigne par $A_n$ l'évènement : « A gagne la partie de la $n^{\text{ième}}$ semaine », par $B_n$ l'évènement : « B gagne la partie de la $n^{\text{ième}}$ semaine », et on note $a_n = p(A_n)$.

Le but de cet exercice est de rechercher la limite de la suite $(a_n)$, en utilisant deux méthodes différentes.

**Première méthode : graphe probabiliste**

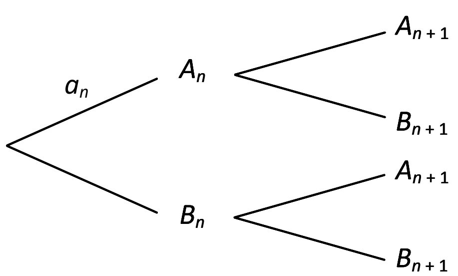
Pour tout entier naturel $n$ non nul, on désigne par $P_n = \begin{pmatrix} a_n & 1-a_n \end{pmatrix}$ la matrice des probabilités associée à la $n^{\text{ième}}$ semaine.

1) Décrire cette situation à l'aide d'un graphe probabiliste, et donner la matrice $M$ de transition associée à ce graphe.
2) On donne $M^2 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,45 & 0,55 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \\ 0,675 & 0,325 \end{pmatrix}$
   Quelle est la probabilité pour que A gagne la partie de la $4^{\text{ème}}$ semaine ?
3) Déterminer la matrice ligne $P = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix}$ telle que $P \times M = P$.
4) En déduire la limite de la suite $(a_n)$ et interpréter le résultat obtenu.

**Deuxième méthode : probabilité et suites**

Dans cette deuxième partie, on ne tient pas compte de résultats démontrés dans la partie précédente.

1) a) Recopier sur votre copie l'arbre ci-dessous, et compléter l'arbre avec les 5 probabilités manquantes.




   b) Justifier que $a_{n+1} = 0,9 - 0,5a_n$ pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 1.
2) On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 1 par : $u_n = a_n - 0,6$
   a) Démontrer que $(u_n)$ est une suite géométrique de raison (−0,5).
   b) En déduire l'expression de $a_n$ en fonction de $n$, puis la limite de la suite $(a_n)$.