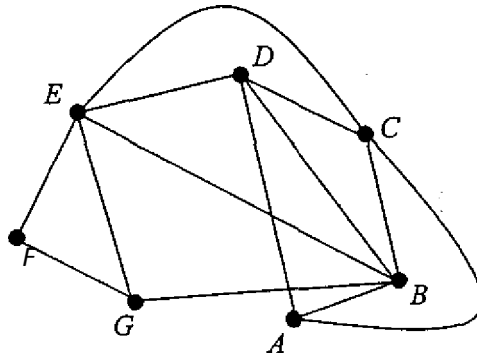


EXERCICE 2 (5 points)

Une compagnie aérienne propose des vols directs entre certaines villes, notées A, B, C, D, E, F et G .

Cela conduit au graphe \mathcal{G} suivant, dont les sommets sont les villes et les arêtes représentent les liaisons aériennes :



1. Le graphe \mathcal{G} est-il complet ? Quel est l'ordre de \mathcal{G} ?
2. a. Sur les cartes d'embarquement, la compagnie attribue à chaque aéroport une couleur, de sorte que deux aéroports liés par un vol direct aient des couleurs différentes.
Proposer un coloriage adapté à cette condition.
- b. Que peut-on en déduire sur le nombre chromatique de \mathcal{G} ?
3. a. Quelle est la nature du sous graphe formé par les sommets A, B, C et D ?
b. Quel est le nombre minimal de couleurs que la compagnie doit utiliser pour pouvoir attribuer une couleur à chaque aéroport en respectant les conditions du 2. ?
4. a. En considérant les sommets dans l'ordre alphabétique, construire la matrice M associée à \mathcal{G} .

$$b. \text{ On donne : } M^8 = \begin{pmatrix} 6945 & 9924 & 8764 & 8764 & 9358 & 3766 & 5786 \\ 9924 & 14345 & 12636 & 12636 & 13390 & 5486 & 8310 \\ 8764 & 12636 & 11178 & 11177 & 11807 & 4829 & 7369 \\ 8764 & 12636 & 11177 & 11178 & 11807 & 4829 & 7369 \\ 9358 & 13390 & 11807 & 11807 & 12634 & 5095 & 7807 \\ 3766 & 5486 & 4829 & 4829 & 5095 & 2116 & 3181 \\ 5786 & 8310 & 7369 & 7369 & 7807 & 3181 & 4890 \end{pmatrix}$$

Combien y a-t-il de chemins de longueurs 8 qui relient B à D ?

5. a. Pourquoi est-il impossible pour un voyageur de construire un itinéraire qui utilise chaque liaison aérienne une et une seule fois ?
b. Montrer qu'il est possible de construire un tel itinéraire en ajoutant une seule liaison qui n'existe pas déjà et que l'on précisera.