

Les employés d'une grande zone commerciale ont le choix entre deux types de restaurants : un « self » ou un restaurant « traditionnel » avec service à la place. On admet que tous les employés mangent chaque jour dans l'un des deux restaurants. On a constaté que :

- si un employé mange au « self » un jour donné, alors le lendemain il y mange également avec une probabilité de 0,8 ;
- si un employé mange dans le restaurant « traditionnel » un jour donné, alors le lendemain il change pour le « self » avec une probabilité de 0,4.

On choisit au hasard un employé de la zone commerciale.

Si n est un entier naturel non nul, on appelle s_n la probabilité que l'employé choisi mange au « self » le n -ième jour, et par $t_n = 1 - s_n$ la probabilité qu'il mange au restaurant « traditionnel » le n -ième jour.

Pour l'état initial, on admet que $s_1 = t_1 = 0,5$, c'est-à-dire que le premier jour, les probabilités de choix du « self » ou du restaurant « traditionnel » sont égales.

Dans la suite, pour tout entier naturel n non nul, on note P_n la matrice $P_n = (s_n \quad t_n)$.

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste.
2. Justifier l'égalité matricielle $P_{n+1} = P_n \times M$ où M désigne la matrice $\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$ et n un entier naturel non nul.
3. Déterminer la probabilité que l'employé tiré au sort mange au « self » le deuxième jour.
4. Déterminer l'état probabiliste stable et l'interpréter.
5. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $s_{n+1} = \frac{2}{5}s_n + \frac{2}{5}$.
6. Dans la suite, pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = s_n - \frac{2}{5}$.
 - a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$ et de premier terme $u_1 = -\frac{1}{6}$.
 - b. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n , où n est un entier naturel non nul.
 - c. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $s_n = -\frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}$.
 - d. Déterminer la limite de la suite (s_n) quand n tend vers $+\infty$ et interpréter ce résultat.