

Afin d'être performant lors d'une grande compétition, Christophe, champion d'athlétisme spécialiste du sprint, s'entraîne chaque jour de l'année et réalise quotidiennement une course à pleine vitesse sur 100 mètres en tentant de courir en moins de 10 secondes.

On constate que :

- S'il réalise moins de 10 secondes sur 100 mètres un jour, la probabilité qu'il réalise moins de 10 secondes sur 100 mètres le lendemain est égale à 0,75.
- S'il ne réalise pas moins de 10 secondes sur 100 mètres un jour, la probabilité qu'il réalise moins de 10 secondes sur 100 mètres le lendemain est égale à 0,5.

Le premier jour de l'année, Christophe n'a pas réussi à réaliser moins de 10 secondes sur sa course à pleine vitesse.

Soit  $n$  un entier naturel non nul. On note :

- $a_n$ , la probabilité que Christophe réalise moins de 10 secondes le  $n$ -ième jour.
- $b_n$ , la probabilité que Christophe ne réalise pas moins de 10 secondes le  $n$ -ième jour.
- $P_n = (a_n \quad b_n)$ , la matrice ligne traduisant l'état probabiliste le  $n$ -ième jour.

1. Écrire la matrice ligne  $P_1$  de l'état probabiliste initial.
2. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B (A représentant l'état « Christophe réalise moins de 10 secondes au 100 mètres », B représentant l'état « Christophe ne réalise pas moins de 10 secondes au 100 mètres »).
3. Écrire la matrice de transition  $M$  de ce graphe en considérant les états dans l'ordre alphabétique.
4. Déterminer la matrice ligne  $P_3$ . Comment peut-on interpréter ce résultat pour Christophe?
5. Soit  $P = (a \quad b)$  la matrice ligne traduisant l'état probabiliste stable.
  - a. Justifier que  $a$  et  $b$  vérifient le système 
$$\begin{cases} 0,25a - 0,5b & = & 0 \\ a + b & = & 1 \end{cases}.$$
  - b. Lors d'une interview à un journaliste sportif, Christophe déclare : « Au vu de tous les entraînements effectués pour me préparer à ce grand évènement je suis confiant et je pense avoir deux chances sur trois de pouvoir réaliser moins de 10 secondes sur 100 mètres lors de la compétition ». Cette affirmation vous paraît-elle justifiée ?