Un employé se rend à son travail en bus et, soit il n'est pas en retard, c'est-à-dire qu'il est à l'heure ou en avance, soit il est en retard.
Le 1[er] jour, la probabilité que cet employé arrive en retard est de $0,2$.

Pour les jours suivants :

S'il est en retard un jour donné, alors la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est de $0,05$.
Si l'employé n'est pas en retard un jour donné, alors la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est de $0,2$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note

R_n l'évènement « l'employé est en retard à son travail le n-ième jour ».
H_n l'évènement « l'employé n'est pas en retard à son travail le n-ième jour ».

On note également, pour tout entier naturel n non nul :
- r_n la probabilité que l'employé soit en retard le n-ième jour,
- h_n la probabilité que l'employé ne soit pas en retard le n-ième jour,
- $P_n = (r_n \quad h_n)$ la matrice qui traduit l'état probabiliste au n-ième jour.

1. Déterminer l'état initial P_1.

2. **a.** Tracer un graphe probabiliste traduisant les données de l'énoncé.

b. Donner la matrice de transition M associée à ce graphe.

3. Quelle est la probabilité que cet employé soit en retard le 3[e] jour. On donnera le résultat avec une valeur arrondie au centième.

4. Soit $P = (x \quad y)$ l'état probabiliste stable.

a. Montrer que x et y vérifient la relation $y = 0,95x + 0,8y$.

b. Déterminer l'état stable du système en arrondissant les valeurs au millième. Interpréter ces résultats.