EXERCICE 2 *(5 points)*

Une commune possède deux clubs de sport que l'on note A et B.

Le club A est installé depuis 1990, le club B a ouvert ses portes au cours de l'année 2004. Au premier janvier 2005, on constate que 1 100 personnes sont abonnées au club A et 400 au club B.

Le prix de l'abonnement est moins coûteux au club A ; les activités proposées sont plus nombreuses au club B. Aussi, chaque année, 14% des abonnés au club A changent pour le club B et 6% des abonnés au club B changent pour le club A. On suppose que la population totale des abonnés reste constante et qu'une personne ne s'abonne jamais aux deux clubs en même temps.

On note a_n le nombre d'abonnés au club A et b_n le nombre d'abonnés au club B au premier janvier de l'année 2005 + n.

E_n désigne la matrice ligne $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$; ainsi $E_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1100 & 400 \end{pmatrix}$

1. Traduire les données par un graphe probabiliste.
2. a. Écrire la matrice de transition M telle que $E_{n+1} = E_n \times M$.
   En déduire E_n en fonction de E_0, M et n. On ne demande pas de démontrer le résultat.

   b. Calculer M^2 . En déduire le nombre d'abonnés aux deux clubs au premier janvier 2007.
3. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a : $a_{n+1} = 0,8 \times a_n + 90$.

   b. Pour n entier naturel, on pose : $u_n = a_n - 450$. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.

   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $a_n = 650 \times 0,8^n + 450$.

   d. Déterminer la limite de a_n quand n tend vers $+\infty$. Interpréter ce résultat pour les deux clubs sportifs.