Dans une grande entreprise, tous les agents commerciaux ont une voiture de fonction, qu'ils doivent choisir entre deux marques A et B. Le parc de véhicules (en location) est renouvelé tous les ans.

On suppose que le nombre d'agents commerciaux de l'entreprise ne varie pas, et que les deux marques A et B restent les seules possibilités pour les voitures de fonction proposées dans l'entreprise.

On a constaté que, chaque année :

- 5 % des agents commerciaux utilisant un véhicule de marque A changent l'année suivante pour B ;
- 15 % des agents commerciaux utilisant un véhicule de marque B changent l'année suivantes pour A ;
- les autres agents poursuivent l'année suivante avec un véhicule de même marque.

On appelle a_n la probabilité qu'un agent commercial choisi au hasard utilise un véhicule de marque A au début de l'année $2010 + n$, et b_n la probabilité qu'il utilise un véhicule de marque B au début de cette même année.

On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état probabiliste de l'année $2010 + n$.

En 2010, la moitié des agents commerciaux possédaient un véhicule de marque A ; ainsi : $P_0 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B, et donner la matrice de transition M (on considèrera les sommets du graphe dans l'ordre alphabétique).
2. Justifier que $P_1 = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \end{pmatrix}$ et donner une interprétation concrète des coefficients de cette matrice.
3. Déterminer l'état probabiliste stable du système et interpréter les résultats obtenus.
4. a) Que vaut, pour tout entier naturel n, la somme $a_n + b_n$?

   b) On sait, pour tout entier naturel n, que $P_{n+1} = P_n \times M$; démontrer, pour tout entier naturel n, que $a_{n+1} = 0,8a_n + 0,15$.
5. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = a_n - 0,75$.

   a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométriques de raison 0,8 dont on précisera le premier terme.

   b) Exprimer u_n en fonction de n, puis démontrer que pour tout entier naturel n,

   $$a_n = -0,25 \times 0,8^n + 0,75.$$

   c) Déterminer la limite de la suite (a_n). Quel résultat retrouve-t-on ainsi ?