Au rugby, réussir une transformation consiste à faire passer le ballon entre deux poteaux verticaux et au dessus de la barre horizontale reliant ces deux poteaux.

Basile est un joueur de rugby, il envisage de devenir professionnel.
Ses différentes expériences en championnat conduisent aux résultats suivants :

- Lors d'un match, la probabilité que Basile réussisse la première transformation est égale à 0,5.
- Si Basile réussit une transformation, la probabilité qu'il réussisse la transformation suivante est égale à 0,8.
- Si Basile ne réussit pas une transformation, la probabilité qu'il réussisse la transformation suivante est égale à 0,6.

Basile se prépare pour son match de sélection en tant que professionnel.
On considère que lors du match, n transformations sont tentées avec n entier naturel supérieur ou égal à 1.
On note T l'état : « Basile réussit sa transformation ».

Pour $n \geqslant 1$, on note :

- p_n la probabilité que Basile réussisse la n-ième transformation.
- q_n la probabilité que Basile ne réussisse pas la n-ième transformation.
- $P_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste lors de la n-ième transformation.

On a $P_1 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

PARTIE A

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets T et $\overline{\text{T}}$.
2. Donner la matrice de transition M de ce graphe probabiliste.
3. Déterminer l'état probabiliste P_2.

PARTIE B

1. a) En utilisant l'égalité $P_{n+1} = P_n\text{M}$, montrer que $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,6q_n$.
   b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,6$.
2. Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \geqslant 1$ par $u_n = p_n - 0,75$.
   a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,2.
   b) En déduire que la suite (p_n) converge et donner sa limite.
   c) Interpréter le résultat précédent.