

Une région se divise en deux zones :
une zone A à proximité d'une grande agglomération,

une zone B à proximité de la mer.

Chaque année, 20 % des habitants de la zone A partent habiter dans la zone B pour avoir un meilleur cadre de vie, et 5 % des habitants de la zone B partent habiter dans la zone A pour se rapprocher de leur lieu de travail.

On sait de plus qu'en 2010, 40 % de la population habitait en zone A.

On suppose que le nombre total d'habitants de la région reste constant au cours du temps.

Pour tout entier naturel n , l'état probabiliste correspondant à l'année $2010 + n$ est défini par la matrice ligne $P_n = (a_n \ b_n)$, où a_n et b_n désignent respectivement les proportions d'habitants des zones A et B.

1. Déterminer la matrice ligne P_0 de l'état initial.
2. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
3.
 - a. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
 - b. Donner la répartition de la population en 2012.
4. Dans la question suivante, on considère la matrice ligne $P = (a \ b)$ où a et b sont deux nombres réels tels que $a + b = 1$.
 - a. Déterminer a et b pour que $P = PM$.
 - b. Les infrastructures de la zone B permettent d'accueillir au maximum 75 % de la population. Lors d'un conseil municipal, le maire affirme qu'il va falloir prévoir de nouvelles infrastructures. A-t-il raison ?