Un club de sport propose à ses adhérents deux types d'abonnements : l'abonnement de type A qui donne accès à toutes les installations sportives et l'abonnement de trype B qui, en plus de toutes les installations sportives, donne accès au sauna, au hammam et au jacuzzi. Chaque adhérent doit choisir un des deux abonnements.

La première année, en 2010, 80% des clients ont choisi l'abonnement de type A. On considère ensuite que 30% des adhérents ayant un abonnement de type A changent d'abonnement pour l'année suivante, tandis que 10% des adhérents ayant un abonnement de type B changent d'abonnement pour l'année suivante.

Soit n un entier supérieur ou égal à 0.

On note a_n la proportion des adhérents ayant un abonnement de type A l'année $2010+n$.
On note b_n la proportion des adhérents ayant un abonnement de type B l'année $2010+n$.
Enfin on note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice traduisant l'état probabiliste de l'année $2010+n$.

1. Déterminer P_0.
2. Représenter cette situation par un graphe probabiliste.
3. Écrire la matrice de transition M asociée à cette situation.
4. Déterminer la matrice P_2. En déduire la probabilité pour qu'en 2012 un adhérent choisisse l'abonnement de type A.
5. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 0, $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,1$.
6. Pour tout entier n supérieur ou égal à 0, on pose $u_n = 4a_n - 1$.
   Montrer que la suite (u_n) est géométrique de raison 0,6. Préciser son premier terme.
7. Pour tout entier n supérieur ou égal à 0, exprimer u_n en fonction de n. En déduire a_n en fonction de n.
8. Calculer la limite de la suite (a_n) puis interpréter concrètement ce résultat.