

**EXERCICE 2** (5 points) **CANDIDATS AYANT SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE**

Pendant la saison estivale, deux sociétés de transport maritime ont l'exclusivité de l'acheminement des touristes entre deux îles du Pacifique. On admet que le nombre de touristes transportés pendant chaque saison est stable.

La société « Alizés » a établi une enquête statistique sur les années 2001 à 2005 afin de prévoir l'évolution de la capacité d'accueil de ses navires.

L'analyse des résultats a conduit au modèle suivant : d'une année sur l'autre, la société « Alizés », notée A, conserve 80% de sa clientèle et récupère 15% des clients de la société concurrente, notée B.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note pour la saison  $(2005 + n)$  :

- $a_n$  la probabilité qu'un touriste ait choisi la société Alizés (A),
- $b_n$  la probabilité qu'un touriste ait choisi l'autre société de transport (B),
- $P_n = (a_n \quad b_n)$ , la matrice traduisant l'état probabiliste, avec  $a_n + b_n = 1$ .

Les résultats pour les probabilités seront arrondies à  $10^{-4}$ .

1. a. Modéliser le changement de situation par un graphe probabiliste de sommets nommés A et B. b. On note  $M$  la matrice de transition de ce graphe. Recopier et compléter sur la copie la matrice suivante :  $M = \begin{pmatrix} 0,8 & \dots \\ 0,15 & \dots \end{pmatrix}$ .
2. En 2005, la société « Alizés » a transporté 45% des touristes. On a donc  $a_0 = 0,45$ .
  - a. Calculer la probabilité qu'un touriste choisisse la société « Alizés » en 2006.
  - b. Déterminer la matrice  $P_2$  et interpréter ces résultats.
3. Soit  $P = (a \quad b)$  avec  $a$  et  $b$  deux réels positifs tels que  $a + b = 1$ .
  - a. Déterminer  $a$  et  $b$  tels que  $P = P \times M$ .
  - b. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ .
  - c. Interpréter ce résultat.
4. On admet qu'en 2015, la probabilité qu'un touriste choisisse la société A est  $\frac{3}{7}$ . On interroge quatre touristes choisis au hasard ; les choix des touristes sont indépendants les uns des autres. Déterminer la probabilité qu'au moins un des quatre touristes choisisse la société « Alizés » pour ses vacances en 2015.