

EXERCICE 2 (5 points)

Les joueurs d'un club de football sont partagés en deux équipes : une équipe A et une équipe B.

L'entraîneur change la composition de ces équipes après chacun des matchs, suivant les performances des joueurs.

Une étude statistique menée au cours des saisons précédentes permet d'estimer que :

- si un joueur fait partie de l'équipe A, la probabilité qu'il reste dans cette équipe pour le match suivant est 0,6.
- si un joueur fait partie de l'équipe B, la probabilité qu'il change d'équipe le match suivant est 0,2.

1. Représenter les données précédentes par un graphe probabiliste G de sommets A et B et donner sa matrice de transition.

2. Pour un entier naturel n donné, on note $P_n = (a_n \ b_n)$ la matrice ligne décrivant l'état probabiliste lors du match n .

Paul vient d'arriver dans le club et la probabilité a_0 qu'il joue dans l'équipe A pour le match de préparation (match 0) est 0,1.

L'état probabiliste initial est donc $P_0 = (0,1 \ 0,9)$

a) Vérifier que $P_1 = (0,24 \ 0,76)$ et calculer P_2 .

b) Quelle est la probabilité que Paul joue dans l'équipe A lors du deuxième match de championnat (match 2) ? (on donnera la valeur approchée du résultat arrondie à 10^{-2} près)

3. On admet que, pour tout entier naturel n : $a_{n+1} = 0,4a_n + 0,2$.

On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = a_n - \frac{1}{3}$

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,4 et de premier terme $v_0 = \frac{-7}{30}$.

b) Exprimer v_n en fonction de n et en déduire que, pour tout entier naturel n :

$$a_n = \frac{1}{3}(1 - 0,7 \times 0,4^n)$$

c) Déduire de ce qui précède la limite de la suite (a_n) .
Quel est l'état stable du graphe G ?