EXERCICE 2 (5 *points*)

Chaque mois, un institut de sondage donne la cote de popularité d'un même groupe politique dans l'opinion publique. Les personnes sondées sont, soit favorables, soit défavorables à ce groupe. Initialement, il y a autant de personnes favorables à ce groupe politique que de personnes qui lui sont défavorables. De chaque mois au mois suivant, on considère que :

- 10 %des personnes qui étaient favorables à ce groupe politique ne le sont plus.
- 15 % des personnes qui n'étaient pas favorables à ce groupe politique le deviennent.

On note, pour tout entier naturel *n* :

- a_n, la probabilité qu'une personne interrogée au hasard au bout de *n* mois soit favorable à ce groupe politique.
- b_n, la probabilité qu'une personne interrogée au hasard au bout de *n* mois ne soit pas favorable à ce groupe politique.
- $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$, la matrice traduisant l'état probabiliste au bout de *n* mois.

On note *M* la matrice de transition telle que, pour tout entier naturel *n* : $P_{n+1} = P_n \times M$

PREMIERE PARTIE

1. Déterminer la matrice P_0 donnant l'état probabiliste initial.
2. Déterminer le graphe probabiliste correspondant à la situation.
3. On admet que $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice P_2 en détaillant les calculs, (on donnera les coefficients sous forme décimale arrondie au centième).
4. Déterminer l'état stable et interpréter ce résultat.

DEUXIEME PARTIE

1. Montrer que $a_{n+1} = 0,75a_n + 0,15$ pour tout entier naturel *n*.
2. On considère la suite (u_n) telle que $u_n = a_n - 0,6$ pour tout entier naturel *n*.
   a. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique de raison 0,75.
   b. En déduire que $a_n = -0,1 \times (0,75)^n$ pour tout entier naturel *n*.
   c. Calculer la limite de a_n quand *n* tend vers +∞. Comment peut-on interpréter cette limite ? En quoi ce résultat est-il cohérent avec celui demandé à la question 4. de la première partie.