TES **GRAPHES** feuille 3

EXERCICE 2 *(5 points)* **CANDIDATS AYANT SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE**

Au 1er janvier 2000, la population d'une ville se répartit également entre locataires et propriétaires. La population globale ne varie pas mais, chaque année, pour raisons familiales ou professionnelles, 10% des propriétaires deviennent locataires tandis que 20% des locataires deviennent propriétaires.

1. On désigne par p_n la probabilité qu'un habitant de la ville choisi au hasard, soit propriétaire au 1er janvier de l'année 2000 + *n* (*n* entier supérieur ou égal à 0), et par l_n, la probabilité qu'il soit locataire.

   La matrice $P_0 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$ traduit l'état probabiliste initial et la matrice $P_n = \begin{pmatrix} p_n & l_n \end{pmatrix}$ (avec, pour tout *n* de $\mathbb{N}$, $p_n + l_n = 1$) l'état probabiliste après *n* années.

   a . Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste et en déduire que ce graphe a pour matrice de transition $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.

   b . Calculer l'état probabiliste P_1.

   c . Déterminer l'état stable du graphe. Que peut-on en conclure pour la population de cette ville ?

2. À l'aide de la relation $P_{n+1} = P_n \times M$, démontrer que, pour tout entier naturel *n*, $p_{n+1} = 0,7\,p_n + 0,2$.

3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel *n*, par $u_n = p_n - \dfrac{2}{3}$.

   a . Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0, 7.

   b . Exprimer u_n en fonction de *n* et démontrer que $p_n = -\dfrac{1}{6} \times 0,7^n + \dfrac{2}{3}$.

   c . Calculer la limite de la suite (p_n) et retrouver le résultat de la question 1.c