

**EXERCICE 3** (5 points)

On considère une population donnée d'une île de Bretagne se rendant régulièrement sur le continent. Deux compagnies maritimes A et B effectuent la traversée.

En 2008, 60% de la population voyage avec la compagnie A. Les campagnes publicitaires font évoluer cette répartition. Une enquête indique alors que chaque année 20% des clients de la compagnie A l'abandonnent au profit de la compagnie B et que 10% des clients de la compagnie B choisissent la compagnie A.

Pour tout entier naturel  $n$ , l'état probabiliste de l'année  $2008 + n$  est défini par la matrice ligne  $(x_n \ y_n)$  où  $x_n$  désigne la proportion de la population qui voyage avec la compagnie A et  $y_n$  la proportion de la population qui voyage avec la compagnie B.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
2. Écrire la matrice de transition  $M$  de ce graphe en prenant les sommets A et B dans cet ordre.
3. Préciser l'état initial  $P_0$  puis montrer que  $P_1 = (0,52 \ 0,48)$ .
4. Déterminer la répartition prévisible du trafic entre les compagnies A et B en 2011.
5. Déterminer l'état stable et l'interpréter.
6. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $x_{n+1} = 0,7x_n + 0,1$
7. On admet que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $x_n = \frac{4}{15} \times 0,7^n + \frac{1}{3}$ .

Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$  et l'interpréter.