

M. et M<sup>me</sup> Martin, qui habitent une grande ville, aiment beaucoup voyager. Ils prévoient toujours de partir pendant l'été, soit à l'étranger, soit de visiter une région en France.

S'ils sont restés en France une année donnée, la probabilité qu'ils partent à l'étranger l'année suivante est de 0,4.

Par contre, s'ils sont partis à l'étranger une année donnée, la probabilité qu'ils retournent à l'étranger l'année suivante est de 0,7.

En été 2009, ce couple est parti à l'étranger.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $P_n$  la matrice ligne  $(a_n \ b_n)$  traduisant l'état probabiliste l'année  $(2009 + n)$ , où  $a_n$  désigne la probabilité que ce couple soit resté en France l'année  $(2009 + n)$  et  $b_n$  la probabilité que ce couple soit parti à l'étranger l'année  $(2009 + n)$ .

#### PARTIE A

1. a. Traduire les données par un graphe probabiliste dont les sommets seront notés  $F$  et  $E$  ( $F$  pour France et  $E$  pour étranger).  
b. En déduire la matrice de transition en prenant tout d'abord  $F$  puis  $E$  pour l'ordre des sommets. On notera  $M$  cette matrice.
2. a. Donner  $P_0$ , l'état probabiliste initial, l'année 2009.  
b. On donne les résultats suivants :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0,48 & 0,52 \\ 0,39 & 0,61 \end{pmatrix}; M^3 = \begin{pmatrix} 0,444 & 0,556 \\ 0,417 & 0,583 \end{pmatrix}; M^4 = \begin{pmatrix} 0,4332 & 0,5668 \\ 0,4251 & 0,5749 \end{pmatrix}.$$

En choisissant la bonne matrice, calculer  $P_3$ . En déduire la probabilité que ce couple parte à l'étranger en 2012 (*On donnera le résultat sous forme décimale arrondie au centième*).

3. Soit  $P$  la matrice ligne  $(x \ y)$  donnant l'état stable où  $x$  et  $y$  sont deux réels positifs tels que  $x + y = 1$ . Déterminer l'état stable puis interpréter le résultat.

**PARTIE B**

1. Montrer que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $a_{n+1} = 0,3a_n + 0,3$ .
2. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $u_n = a_n - \frac{3}{7}$ .
  - a. Montrer que la suite  $(u_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
  - b. En déduire l'expression de  $u_n$ , puis celle de  $a_n$  en fonction de  $n$ .
  - c. Déterminer la limite de la suite  $(a_n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Que retrouve-t-on ?