

M. et M^{me} Martin, qui habitent une grande ville, aiment beaucoup voyager. Ils prévoient toujours de partir pendant l'été, soit à l'étranger, soit de visiter une région en France.

S'ils sont restés en France une année donnée, la probabilité qu'ils partent à l'étranger l'année suivante est de 0,4.

Par contre, s'ils sont partis à l'étranger une année donnée, la probabilité qu'ils retournent à l'étranger l'année suivante est de 0,7.

En été 2009, ce couple est parti à l'étranger.

Pour tout entier naturel n , on note P_n la matrice ligne $(a_n \ b_n)$ traduisant l'état probabiliste l'année $(2009 + n)$, où a_n désigne la probabilité que ce couple soit resté en France l'année $(2009 + n)$ et b_n la probabilité que ce couple soit parti à l'étranger l'année $(2009 + n)$.

PARTIE A

1. a. Traduire les données par un graphe probabiliste dont les sommets seront notés F et E (F pour France et E pour étranger).
b. En déduire la matrice de transition en prenant tout d'abord F puis E pour l'ordre des sommets. On notera M cette matrice.
2. a. Donner P_0 , l'état probabiliste initial, l'année 2009.
b. On donne les résultats suivants :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0,48 & 0,52 \\ 0,39 & 0,61 \end{pmatrix}; M^3 = \begin{pmatrix} 0,444 & 0,556 \\ 0,417 & 0,583 \end{pmatrix}; M^4 = \begin{pmatrix} 0,4332 & 0,5668 \\ 0,4251 & 0,5749 \end{pmatrix}.$$

En choisissant la bonne matrice, calculer P_3 . En déduire la probabilité que ce couple parte à l'étranger en 2012 (*On donnera le résultat sous forme décimale arrondie au centième*).

3. Soit P la matrice ligne $(x \ y)$ donnant l'état stable où x et y sont deux réels positifs tels que $x + y = 1$. Déterminer l'état stable puis interpréter le résultat.

PARTIE B

1. Montrer que pour tout entier naturel n on a : $a_{n+1} = 0,3a_n + 0,3$.
2. Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = a_n - \frac{3}{7}$.
 - a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - b. En déduire l'expression de u_n , puis celle de a_n en fonction de n .
 - c. Déterminer la limite de la suite (a_n) lorsque n tend vers $+\infty$. Que retrouve-t-on ?