

EXERCICE 4 (5 points)

Deux chaînes de télévision A et B programment chaque semaine, à la même heure, deux émissions concurrentes. On suppose que le nombre global de téléspectateurs de ces émissions reste constant. La première semaine, 70% de ces téléspectateurs ont regardés la chaîne A.

Une étude statistique montre que :

15% des téléspectateurs qui ont regardé la chaîne A une semaine, regardent la chaîne B la semaine suivante.

10% des téléspectateurs qui ont regardé la chaîne B une semaine, regardent la chaîne A la semaine suivante.

On note respectivement a_n et b_n les proportions de téléspectateurs des chaînes A et B la n -ième semaine et P_n la matrice ligne $(a_n \quad b_n)$. On a donc $P_1 = (0,7 \quad 0,3)$

1. a. Déterminer le graphe probabiliste représentant la situation.
b. Donner la matrice de transition M associée à ce graphe.
2. Calculer M^3 à l'aide de la calculatrice, donner les résultats en arrondissant à 10^{-3} près. Quelle est la répartition des téléspectateurs entre les deux chaînes la quatrième semaine ?
3. On considère la matrice ligne $P = (a \quad b)$, où a et b sont deux réels tels que $a + b = 1$.
 - a. Déterminer a et b pour que $P = PM$
 - b. Interpréter les deux valeurs trouvées.
4. On admet que pour tout entier naturel $n > 0$ on a : $a_n = 0,4 + 0,3 \times (0,75^{n-1})$.
 - a. Résoudre l'équation $a_n < 0,5$.
 - b. À partir de quelle semaine l'audience de l'émission de la chaîne B dépassera-t-elle celle de l'émission de la chaîne A ?