

**EXERCICE 2** (5 points)

Dans une société, le service informatique utilise deux logiciels de gestion : d'une part, le logiciel Aurora, leader du marché, et d'autre part le logiciel Bestmath, son concurrent. Le chef de réseau informatique enregistre chaque année, en janvier et en juillet, le nombre d'utilisateurs des deux logiciels et fournit des rapports réguliers sur le comportement des utilisateurs.

Lors de l'enquête de janvier 2009, le chef de réseau a constaté que 32 % des informaticiens utilisaient le logiciel Aurora, les autres informaticiens utilisaient le logiciel Bestmath.

Lors de chaque relevé suivant (juillet 2009, janvier 2010, ...), le chef du réseau informatique a constaté que 20 % des utilisateurs du logiciel Aurora avaient changé de logiciel et utilisaient désormais le logiciel Bestmath, tandis que 25 % des utilisateurs du logiciel Bestmath avaient changé de logiciel et utilisaient désormais Aurora.

Les semestres sont comptés à partir de janvier 2009, que l'on appellera semestre 0 (juillet 2009 est donc le semestre 1).

Pour tout entier naturel  $n$ , on désigne par :

- $a_n$  la probabilité qu'un informaticien pris au hasard utilise le logiciel Aurora le semestre  $n$  ;
- $b_n$  la probabilité qu'un informaticien pris au hasard utilise le logiciel Bestmath le semestre  $n$ .

1. a. Traduire les données l'énoncé par un graphe probabiliste.  
b. Écrire la matrice de transition  $M$  associée à ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
2. a. On note  $P_0 = (a_0 \quad b_0)$  l'état initial de ce graphe en janvier 2009. Déterminer  $P_0$ .  
b. On appelle  $P_1$  l'état de la société en juillet 2009. Vérifier que  $P_1 = (0,426 \quad 0,574)$ .  
c. On appelle  $P_2$  l'état en janvier 2010. Déterminer  $P_2$  (les résultats seront arrondis à  $10^{-3}$ ).
3. Dans cette partie on étudie la suite  $(a_n)$ .  
a. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $a_{n+1} = 0,55a_n + 0,25$ .  
b. On considère la suite  $(U_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :  $U_n = \frac{5}{9} - a_n$ .  
Démontrer que la suite  $(U_n)$  est géométrique, déterminer sa raison ainsi que le premier terme.  
c. En déduire l'expression de  $U_n$  puis de  $a_n$  en fonction de  $n$ .
4. Soit  $P = (x \quad y)$  l'état probabiliste stable.  
a. Déterminer  $x$  et  $y$ .  
b. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*  
On suppose que l'utilisation du logiciel Aurora dans l'entreprise progresse régulièrement de la même façon. Le distributeur du logiciel Aurora peut-il espérer que son logiciel soit utilisé un jour par plus de 60 % des informaticiens de l'entreprise ?