EXERCICE 3 *(5 points)*

Franck Geek est adepte de jeux vidéo en ligne. Afin de préserver son temps de travail scolaire, il essaye de se modérer. Il constate que :

- s'il a joué un jour, la probabilité qu'il ne le fasse pas le lendemain est de 0,6 ;
- s'il n'a pas joué un jour, la probabilité qu'il joue le lendemain est de 0,9.

Le jour de la rentrée (premier jour), Franck a décidé de ne pas jouer.

1. a) Quelle est la probabilité que Franck joue le deuxième jour ?
   b) Quelle est la probabilité qu'il ne joue pas le deuxième jour ?
2. On note D l'évènement : « Franck a joué » et E l'évènement : « Franck a su résister ».
   a) Modéliser cette situation par un graphe probabiliste.
   b) Donner la matrice de transition M associée à ce graphe.
3. Soit n un entier naturel non nul. Soient D_n l'évènement : « Franck a joué le n-ième jour » et E_n l'évènement : « Franck a su résister le n-ième jour ».
   L'état probabiliste lors du n-ième jour est alors donné par la matrice ligne $P_n = (d_n \quad e_n)$ où d_n désigne la probabilité de l'évènement D_n et e_n celle de l'évènement E_n . On a ainsi $P_1 = (0 \quad 1)$.

   a) Déterminer P_2.
   b) Donner la relation liant P_{n+1} et P_n .
   c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $d_{n+1} = -0,5d_n + 0,9$.
4. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = d_n - 0,6$.
   a) Démontrer que la suite u est une suite géométrique. Préciser sa raison et la valeur de son premier terme.
   b) Exprimer alors u_n puis d_n en fonction de n.
   c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} d_n$ et interpréter ce résultat.