EXERCICE 2 *(5 points)* **CANDIDATS AYANT SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE**

On a divisé une population en deux catégories : « fumeurs » et « non-fumeurs ».

Une étude statistique a permis de constater que, d'une génération à l'autre,

- 60% des descendants de fumeurs sont des fumeurs,
- 10% des descendants de non-fumeurs sont des fumeurs.

On suppose que le taux de fécondité des fumeurs est le même que celui des non fumeurs.

On désigne par :

- f_n le pourcentage de fumeurs à la génération de rang n,
- $g_n = 1 - f_n$ le pourcentage de non-fumeurs à la génération de rang n, où n est un entier naturel.

On considère qu'à la génération 0, il y a autant de fumeurs que de non-fumeurs.

On a donc $f_0 = g_0 = 0{,}5$.

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste.
2. Justifier l'égalité matricielle :

   $\begin{pmatrix} f_{n+1} & g_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n & g_n \end{pmatrix} \times A$ où A désigne la matrice : $\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$

3. Déterminer le pourcentage de fumeurs à la génération de rang 2.
4. Déterminer l'état probabiliste stable et l'interpréter.
5. Montrer que : pour tout entier naturel n, $f_{n+1} = 0{,}5 f_n + 0{,}1$.
6. On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = f_n - 0{,}2$.
   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b. Donner l'expression de u_n en fonction de n.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $f_n = 0{,}3 \times 0{,}5^n + 0{,}2$.
   d. Déterminer la limite de la suite f_n lorsque n tend vers $+\infty$ et l'interpréter.