

Dans une commune, l'école de musique propose des cours d'éveil musical.

En 2013, 20 % des enfants de la commune suivaient les cours d'éveil musical de cette école. Chaque année, 70 % des enfants inscrits restent dans l'école l'année suivante, et par ailleurs, 20 % des enfants de la commune qui n'y étaient pas inscrits viennent s'y ajouter.

Pour tout entier naturel n , on note :

- c_n la proportion des enfants de la commune inscrits à cet éveil musical en $(2013 + n)$,
- d_n la proportion des enfants de la commune qui ne sont pas inscrits à cet éveil musical en $(2013 + n)$,
- $E_n = \begin{pmatrix} c_n & d_n \end{pmatrix}$ la matrice traduisant l'état probabiliste de l'année $(2013 + n)$.

Ainsi, on a $E_0 = (0,2 \quad 0,8)$.

On choisit au hasard un enfant de la commune.

Partie A

1. Traduire la situation par un graphe probabiliste. On note :
 - C l'état « l'enfant est inscrit aux cours d'éveil musical »
 - D l'état « l'enfant n'est pas inscrit aux cours d'éveil musical »
2. Déterminer la matrice A de transition, c'est-à-dire la matrice vérifiant, pour tout entier naturel n , $E_{n+1} = E_n \times A$.
3. Déterminer E_1 et E_2 .
4. Déterminer l'état probabiliste stable en justifiant votre réponse. Interpréter les résultats.

Partie B

1. On rappelle que pour tout entier naturel n , on a $c_n + d_n = 1$.
Justifier que pour tout entier naturel n , on a $c_{n+1} = 0,5c_n + 0,2$.
On admet pour la suite de l'exercice que tout entier naturel n , $c_n = -0,2 \times 0,5^n + 0,4$.
2. Montrer que la suite (c_n) est croissante.
3.
 - a. Proposer un algorithme affichant la proportion des enfants de la commune inscrits à cet éveil musical à partir de 2013 jusqu'à l'année $(2013 + n)$, pour un nombre d'années n saisi par l'utilisateur.
 - b. La proportion des enfants de la commune inscrits à cet éveil musical franchira-t-elle le seuil de 39 % ? Si oui, indiquer l'année en expliquant la démarche.
4. Le directeur de cette école affirme que si ce modèle d'évolution reste valable, la proportion d'enfants de la commune inscrits à cet éveil musical dépassera le seuil de 50 %.
Peut-on valider cette affirmation ? Argumenter la réponse.