

Partie A

Une petite ville dispose d'un service municipal de location de vélos réservé à ses habitants.

Pour cette étude, on suppose que la population de la ville reste constante.

Le 1^{er} janvier 2017, la ville compte 5 % d'abonnés parmi ses habitants. Ces dernières années, le responsable du service location a constaté que :

- 93 % des abonnements sont renouvelés ;
- 1 % des habitants qui n'étaient pas abonnés l'année précédente souscrivent un abonnement.

On note A l'état : « un habitant est abonné » et P l'état : « un habitant n'est pas abonné ».

Pour tout entier naturel n , on désigne par a_n la probabilité qu'un habitant soit abonné l'année $2017 + n$ et p_n la probabilité qu'un habitant ne soit pas abonné l'année $2017 + n$.

La matrice ligne $R_n = (a_n \quad p_n)$ donne l'état probabiliste du nombre d'abonnés l'année $2017 + n$. Ainsi $R_0 = (a_0 \quad p_0) = (0,05 \quad 0,95)$.

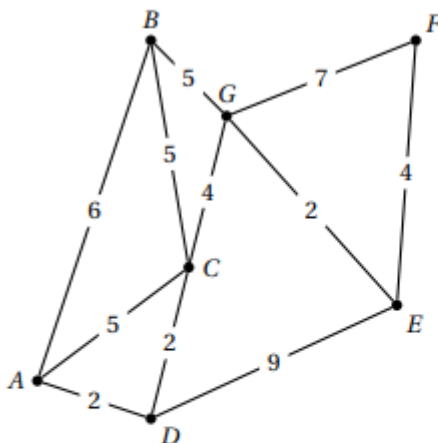
1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets A et P où le sommet A représente l'état « un habitant est abonné » et P l'état « un habitant n'est pas abonné ».
2. Déterminer la matrice de transition T de ce graphe en respectant l'ordre A puis P des sommets.
3. Déterminer R_1 .
4. Déterminer l'état probabiliste en 2021.
Les résultats seront arrondis au millièmes.
5. On admet qu'il existe un état stable $(x \quad y)$.

a. Justifier que x et y sont solutions du système :
$$\begin{cases} -7x + y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}.$$

- b. Déterminer l'état stable de ce graphe.

Partie B

Le responsable du service de location souhaite vérifier l'état des pistes cyclables reliant les parkings à vélos de location disposés dans la ville. On modélise la disposition des lieux par le graphe étiqueté ci-contre dont les sommets représentent les parkings à vélo. Les poids des arêtes sont les durées moyennes de parcours, en minute, pour se rendre d'un parking à l'autre en suivant la piste cyclable.



1. Le responsable peut-il planifier un parcours partant de son bureau situé en A jusqu'à la mairie située en F en passant par toutes les pistes cyclables sans emprunter deux fois le même chemin ?
2. Le responsable est pressé. Déterminer le parcours le plus rapide possible permettant d'aller de A à F .