

En 2016, un institut de sondage mène une enquête régionale sur la manière dont les particuliers paient leur assurance. Les assurés se répartissent en deux catégories distinctes :

- la catégorie A, composée des assurés qui paient en agence ;
- la catégorie B, composée des assurés qui paient en ligne.

En 2016, 92 % des assurés paient en agence.

On admet que, d'une année à l'autre, 4 % des assurés de la catégorie A passent à la catégorie B et que 1 % des assurés de la catégorie B passent à la catégorie A.

On suppose que le nombre d'assurés est constant et que chaque année un assuré fait partie d'une seule catégorie.

Pour tout entier naturel n , on considère l'année $(2016 + n)$ et on note :

- a_n la probabilité qu'un assuré, pris au hasard, soit de catégorie A cette année-là,
- b_n la probabilité qu'un assuré, pris au hasard, soit de catégorie B cette année-là,
- P_n la matrice ligne $(a_n \quad b_n)$. Ainsi $P_0 = (0,92 \quad 0,08)$.

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste.

On notera A l'état « l'assuré est de catégorie A » et B l'état « l'assuré est de catégorie B ».

2. On admet que la matrice de transition M associée à cette situation est $M = \begin{pmatrix} 0,96 & 0,04 \\ 0,01 & 0,99 \end{pmatrix}$.

a. Exprimer P_1 en fonction de M et de P_0 .

b. En déduire la probabilité qu'un assuré soit de catégorie A en 2017. Arrondir le résultat au centième.

3. Soit $P = (a \quad b)$ la matrice ligne donnant l'état stable du graphe.

a. Justifier que $\begin{cases} -0,04a + 0,01b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$.

b. Résoudre le système précédent. Quelle conclusion peut-on tirer quant à la répartition à long terme des assurés ?

4. a. Montrer que, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,95a_n + 0,01$.

On admet que, pour tout entier naturel n , $a_n = 0,2 + 0,72 \times 0,95^n$ et que la suite (a_n) est décroissante.

b. On souhaite déterminer au bout de combien d'années moins d'un assuré sur deux sera de catégorie A. Recopier et compléter l'algorithme pour qu'il donne le résultat attendu.

Variables :	A est un nombre réel N est un entier naturel
Initialisation	Affecter à A la valeur 0,92 Affecter à N la valeur 0
Traitement	Tant que Affecter à N la valeur Affecter à A la valeur Fin Tant que
Sortie	Afficher ...

c. La proportion d'assurés de catégorie A va-t-elle devenir inférieure à 0,5 ? Si oui, à partir de quelle année ? Expliquer la démarche choisie.