

Pour l'année scolaire, un professeur propose aux élèves de sa classe le choix entre deux types d'accompagnement : « Approfondissement » ou « Ouverture culturelle ». Chaque semaine, un élève doit s'inscrire dans un et un seul des deux accompagnements proposés.

La première semaine, 20 % des élèves de la classe ont choisi « Approfondissement » et tous les autres ont choisi « Ouverture culturelle ». On admet que, chaque semaine,

- 20 % des élèves ayant choisi « Ouverture culturelle » une certaine semaine s'inscrivent en « Approfondissement » la semaine suivante ;
- 30 % des élèves ayant choisi « Approfondissement » une certaine semaine s'inscrivent en « Ouverture culturelle » la semaine suivante.

On s'intéresse à l'évolution de la répartition des élèves de cette classe entre les deux types d'accompagnement au fil des semaines.

On interroge au hasard un élève de la classe et on suit son choix d'option au fil des semaines.

1. On note A l'état « L'élève a choisi Approfondissement » et B l'état « L'élève a choisi Ouverture culturelle ».
 - a. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B .
 - b. Écrire la matrice de transition M associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.
2. On note P_1 la matrice traduisant l'état probabiliste de la première semaine. Ainsi $P_1 = (0,2 \quad 0,8)$.
 - a. Donner la matrice M^2 puis déterminer la probabilité que l'élève ait choisi « Approfondissement » lors de la troisième semaine.
 - b. À long terme, quelle est la probabilité qu'un élève choisisse « Approfondissement » ?

3. Pour tout entier naturel non nul n on note :

- a_n la probabilité que l'élève interrogé ait choisi « Approfondissement » lors de la n -ième semaine,
- b_n la probabilité que l'élève interrogé ait choisi « Ouverture culturelle » lors de la n -ième semaine.

Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$a_{n+1} = 0,5a_n + 0,2.$$

4. On admet que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$a_n = 0,4 - 0,4 \times 0,5^n.$$

Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation suivante :

$$0,4 - 0,4 \times 0,5^n > 0,399.$$

5. a. Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il affiche le plus petit entier naturel n non nul tel que $a_n > 0,399$.

Variables	N est un entier naturel A est un nombre réel
Initialisation	Affecter à N la valeur 1 Affecter à A la valeur 0,2
Traitement Affecter à A la valeur $0,5 \times A + 0,2$
Sortie	Afficher N

b. Quelle est la valeur affichée par l'algorithme en sortie ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.