

Partie A

Dans un jeu vidéo, une suite d'énigmes est proposée au joueur. Ces énigmes sont classées en deux catégories : les énigmes de catégorie A sont les énigmes faciles ; les énigmes de catégorie B sont les énigmes difficiles.

Le choix des énigmes successives est aléatoire et vérifie les conditions suivantes :

- la première énigme est facile ;
- si une énigme est facile, la probabilité que la suivante soit difficile est égale à 0,15 ;
- si une énigme est difficile, la probabilité que la suivante soit facile est égale à 0,1.

Pour $n \geq 1$, on note :

- a_n la probabilité que l'énigme numéro n soit facile (de catégorie A) ;
- b_n la probabilité que l'énigme numéro n soit difficile (de catégorie B) ;
- $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ l'état probabiliste pour l'énigme numéro n .

1. Donner la matrice P_1 .
2. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
3. Écrire la matrice M associée à ce graphe, puis donner la matrice ligne P_2 .
4. Sachant que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $a_n + b_n = 1$, montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$a_{n+1} = 0,75a_n + 0,1.$$

5. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose $v_n = a_n - 0,4$.

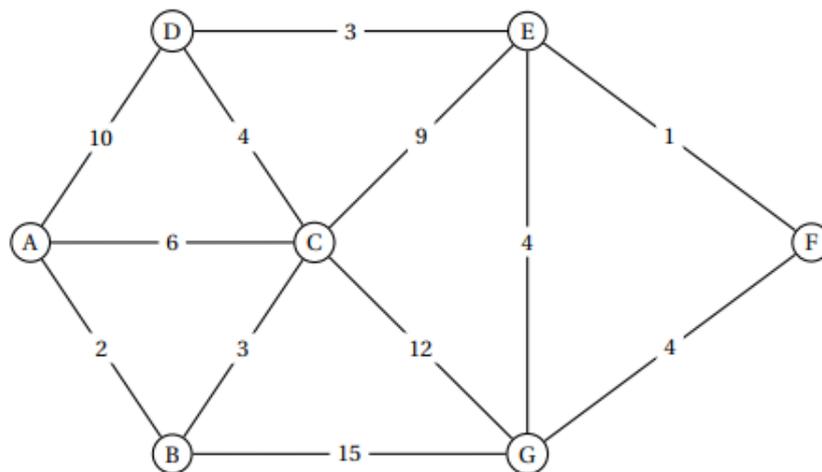
- a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
- b. Exprimer v_n en fonction de n , puis montrer que pour tout entier $n \geq 1$:

$$a_n = 0,8 \times 0,75^n + 0,4.$$

- c. Préciser la limite de la suite (v_n) .
- d. Une revue spécialisée dans les jeux vidéo indique que plus le joueur évolue dans le jeu, plus il risque d'avoir à résoudre des énigmes difficiles. Que penser de cette analyse ?

Partie B

Une des énigmes consiste à réaliser un parcours en un minimum de temps. Le graphe suivant schématise le parcours. L'étiquette de chaque arête indique le temps de parcours en minute entre les deux sommets qu'elle relie. Par exemple, le temps de parcours de C vers D, ou de D à C, est égal à quatre minutes.



Quel chemin le joueur doit-il prendre pour aller de A à G en minimisant son temps de parcours? Expliquer la démarche utilisée.