EXERCICE 2 (*5 points*)

Deux enfants Alexis et Bilal jouent dans la cour de leur immeuble.

Ils décident d'entamer une compétition formée d'une série de parties (notées partie 1, partie 2, . . .).

On désigne par *n* un entier supérieur ou égal à 1. On suppose que :

- Alexis a 65 % de chances de gagner la partie 1 ;
- si Alexis gagne la partie *n*, alors il a 10 % de chances de gagner la partie *n* + 1 ;
- si Alexis perd la partie *n*, alors il a 60 % de chances de gagner la partie *n* + 1.

Pour tout entier *n* supérieur ou égal à 1, on note :

- A_n l'évènement : « Alexis gagne la partie *n* » ;
- B_n l'évènement : « Bilal gagne la partie *n* » (on remarquera que : $B_n = \overline{A_n}$) ;
- a_n la probabilité de l'évènement A_n et b_n celle de l'évènement B_n.

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre

PARTIE A : Étude d'un graphe probabiliste

Pour tout entier *n* supérieur ou égal à 1, on note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne représentant l'état probabiliste lors de la partie *n*.

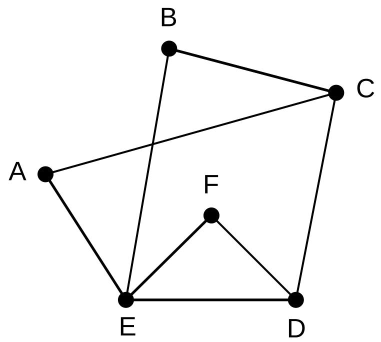
1. a. Donner sans justification la matrice P_1.
   b. Traduire la situation à l'aide d'un graphe probabiliste.
2. On admet que la matrice de transition *M* associée au graphe probabiliste précédent est $M = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$.
   a. Donner M^2 (on pourra utiliser la calculatrice ; les coefficients de M^2 seront donnés sous forme décimale exacte).
   b. En déduire la probabilité que Bilal gagne la partie 3, en justifiant la réponse (le résultat sera donné sous forme décimale arrondie à 10^{-2}).
3. Soit $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état stable (*x* et *y* sont des nombres réels tels que $x + y = 1$).
   a. Déterminer les nombres *x* et *y*.
   b. Interpréter ces deux valeurs.

PARTIE B : Détermination d'un nombre chromatique

Carlos (C), Dora (D), Edwige (E) et Farid (F), eux aussi intéressés par le jeu, décident de rejoindre Alexis (A) et Bilal (B) et de former ainsi des équipes.

Comme ils ne s'entendent pas tous entre eux, ils optent pour une répartition en équipe par affinité.

On donne ci-après le graphe G d'incompatibilité entre les différents enfants :



Par exemple, Alexis ne peut pas se trouver dans une équipe où il y aurait Carlos ou Edwige.

Cela est représenté dans le graphe par le fait que les sommets A et C, ainsi que les sommets A et E sont adjacents.

1. Déterminer un sous-graphe complet d'ordre 3. Que peut-on en déduire pour le nombre chromatique du graphe G ?
2. Donner en justifiant un encadrement du nombre chromatique du graphe G.
3. Proposer une coloration du graphe (sans justification) puis en déduire le nombre chromatique du graphe G.
4. Proposer une répartition des enfants faisant intervenir un nombre minimal d'équipes.