

Afin de se préparer à courir des marathons, Hugo aimerait effectuer quotidiennement un footing à compter du 1^{er} janvier 2014.

On admet que :

- Si Hugo court un jour donné, la probabilité qu'il ne coure pas le lendemain est de 0,2 ;
- s'il ne court pas un jour donné, la probabilité qu'il ne coure pas le lendemain est de 0,4.

On note C l'état « Hugo court » et R l'état « Hugo ne court pas ».

Pour tout entier naturel n , on note :

- c_n la probabilité de l'évènement « Hugo court le $(n+1)$ -ième jour » ;
- r_n la probabilité de l'évènement « Hugo ne court pas le $(n+1)$ -ième jour » ;
- P_n la matrice $\begin{pmatrix} c_n & r_n \end{pmatrix}$ correspondant à l'état probabiliste le $(n+1)$ -ième jour.

Le 1^{er} janvier 2014, motivé, le jeune homme court.

On a donc : $P_0 = \begin{pmatrix} c_0 & r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets C et R .
2. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
3. On donne $M^6 = \begin{pmatrix} 0,750016 & 0,249984 \\ 0,749952 & 0,250048 \end{pmatrix}$.

Quel calcul matriciel permet de déterminer la probabilité c_6 qu'Hugo coure le 7^e jour ?

Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de c_6 .

4. **a.** Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n .
b. Montrer que, pour tout entier naturel n , $c_{n+1} = 0,2c_n + 0,6$.
5. Pour tout entier naturel n , on considère la suite (v_n) définie par $v_n = c_n - 0,75$.
a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,2. Préciser le premier terme.
b. Exprimer v_n en fonction de n .
Déterminer la limite de la suite (v_n) .
c. Justifier que, pour tout entier naturel n , $c_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^n$.
d. Que peut-on conjecturer concernant la probabilité qu'Hugo coure le 29 décembre 2014 ?
e. Conjecturer alors l'état stable de ce graphe.
Comment valider votre conjecture ?