

Une étude statistique sur une population d'acheteurs a montré que :

- 90 % des personnes qui ont fait leur dernier achat en utilisant internet affirment vouloir continuer à utiliser internet pour faire le suivant. Les autres personnes comptent faire leur prochain achat en magasin ;
- 60 % des personnes qui ont fait leur dernier achat en magasin affirment vouloir continuer à effectuer le suivant en magasin. Les autres comptent effectuer leur prochain achat en utilisant internet.

Dans toute la suite de l'exercice, n désigne un entier naturel non nul. Une personne est choisie au hasard parmi les acheteurs. On note :

- a_n la probabilité que cette personne fasse son n -ième achat sur internet ;
- b_n la probabilité que cette personne fasse son n -ième achat en magasin.

On suppose de plus que $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$.

On note $P_n = (a_n \quad b_n)$ l'état probabiliste correspondant au n -ième achat. Ainsi $P_1 = (1 \quad 0)$.

On note :

- A l'état : « La personne effectue son achat sur internet » ;
- B l'état : « La personne effectue son achat en magasin ».

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B .
2. Écrire la matrice de transition M associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.
3. a. Calculer la matrice M^4 .
b. En déduire que la probabilité que la personne interrogée fasse son 5^e achat sur internet est égale à 0,8125.
4. On note $P = (a \quad b)$ l'état stable associé à ce graphe.
a. Montrer que les nombres a et b sont solutions du système :

$$\begin{cases} 0,1a - 0,4b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

- b. Résoudre le système précédent.
- c. À long terme, quelle est la probabilité que cette personne fasse ses achats sur internet ?

5. a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$a_{n+1} = 0,5a_n + 0,4.$$

- b. Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il affiche le plus petit entier naturel n non nul tel que $a_n \leq 0,801$.

Variables :	N est un entier naturel A est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à N la valeur 1 Affecter à A la valeur 1
Traitement :	Tant que ... Affecter à A la valeur $0,5 \times A + 0,4$ Affecter à N la valeur ...
Sortie :	Fin Tant que Afficher N

- c. Quelle est la valeur affichée par l'algorithme en sortie ?